



# Pour l'évaluation des modifications des caractéristiques d'un système dynamique

Rana Elias

## ► To cite this version:

Rana Elias. Pour l'évaluation des modifications des caractéristiques d'un système dynamique. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1107 . pastel-00964327

**HAL Id: pastel-00964327**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00964327>**

Submitted on 24 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS-EST  
ECOLE DOCTORALE SCIENCE INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

## THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

Spécialité : *Sciences de l'ingénieur*

par

Rana ELIAS

Sujet de la thèse :

Pour l'évaluation des modifications des caractéristiques  
d'un système dynamique

Thèse soutenue le 11 décembre 2013 devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	<b>Guy BONNET</b>
<i>Rapporteurs :</i>	<b>Didier REMOND Guilhem MICHON</b>
<i>Examineurs :</i>	<b>Mikhaël BALABANE Toni SAYAH</b>
<i>Directeur de thèse :</i>	<b>Nelly POINT</b>
<i>Co-directeur de thèse :</i>	<b>Pierre ARGOUL Joanna BODGI</b>



*À celui qui protège mon rêve, mon espoir;  
à celui qui m'offre la devise de l'avenir ...  
à mon Père !*

*À celle qui m'enveloppe de tendresse et d'amour,  
et m'encadre de bonheur et d'admiration ...  
à ma Mère !*

*À celle qui partage avec moi tous mes voyages de rêves;  
tous mes désirs et souhaits ...  
à ma Sœur !*

*À celui qui me soutient non pour bâtir des murs,  
mais pour installer des ponts ...  
à mon Frère !*



*“Dans les profondeurs de vos espoirs et de vos désirs  
sommeille votre silencieuse connaissance de l’au-delà ;  
de même que la semence rêve sous la neige, votre coeur rêve du printemps.  
Ayez confiance en vos rêves, car en eux  
se cache le portail de l’éternité.”*

Gibran Khalil Gibran, *Le prophète*.



# Remerciements

Cette thèse, maintenant terminée, soutenue et validée a été réalisée grâce à une collaboration entre l'Ecole des Ponts ParisTech et le CNRS Libanais. Je les remercie de m'avoir accueillie et soutenue pendant ma thèse.

En ces quelques lignes je tiens à adresser mes remerciements aux personnes qui, au cours de ces années, ont fait de cette expérience un très bon souvenir.

En premier lieu, j'exprime ma profonde reconnaissance et mes vifs remerciements à Mme Nelly POINT, ma directrice de thèse, qui m'a guidée tout au long de ce parcours passionnant. J'ai eu la chance de travailler non seulement avec une grande scientifique, mais aussi auprès d'une personne chaleureuse dont j'aimerais saluer les qualités humaines. Merci Nelly de m'avoir entourée, d'avoir encouragé mes initiatives et de m'avoir fait confiance !

Je remercie également Mme Joanna BODGI et M. Pierre ARGOUL, mes co-directeurs de thèse, qui m'ont encouragée et suivie pour aller jusqu'au bout. Merci Joanna et Pierre pour vos précieux conseils scientifiques qui ont été de grandes valeurs pour l'aboutissement de cette thèse !

J'adresse mes remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : M. Guy BONNET qui m'a fait l'honneur de présider le jury, M. Didier REMOND et M. Guilhem MICHON qui ont accepté d'être rapporteurs, ainsi que M. Mikhaël BALABANE pour avoir accepté d'évaluer mon travail. Je remercie particulièrement M. Toni SAYAH qui a fait le trajet depuis le Liban pour faire partie du jury. Merci Toni de m'avoir accompagnée dès la première année d'étude et d'être toujours présent pendant les moments les plus difficiles ! Merci à chaque membre de mon jury pour la richesse de leurs commentaires !

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à M. Karam SAB, directeur du laboratoire Navier à l'Ecole des Ponts ParisTech, parce qu'il m'a accepté au sein du laboratoire. Un grand merci à Marie-Françoise KASPI pour son aide, sa gentillesse et son soutien tout au long de ces années !

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide de nombreuses personnes. Je n'ai sûrement pas assez d'espace pour vous remercier tous, mais sans vous je ne serais pas ici aujourd'hui pour écrire ces mots. J'adresse une pensée particulière à tous les membres du laboratoire (Gwendal, Thu-Ha-Le, Achille, Laurent C., Mathieu, ...) pour votre sympathie, votre amitié. J'ai eu beaucoup de plaisir de travailler avec vous. Le cadre de travail était idéal.

Je remercie à cette occasion Lina BOUHAYA, Frédéric TAYEB, Fernanda RIVALLIN, Wafa BELHAK et Laurent BROCHARD, toujours souriants et toujours disponibles. Merci à vous pour votre bonne humeur, pour toutes ces séances de rires et de sourires, et pour toutes ces discussions autour d'un café où, comme il se doit, nous avons refait le monde ... Merci Lina, Fred, Fé, Wéfé et Laurent !

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée très particulière à Saad SAAD



pour les humbles bouquets de cèdres que tu m'as offerts lors de nos rencontres mensuelles, arrosés par les larmes du lointain et emballés par l'amour des parents !

Je remercie vivement Joseph YAGHI et sa femme Carole, Milad SAAD et sa femme Nicole pour vos conseils et encouragements ; j'admire votre support profond qui anime mes idées !

Un immense merci à Mira FREYFER, une amie très spéciale. C'est avec toi que je retrouve le courage nécessaire pour surmonter tout obstacle rencontré.

Je tiens à remercier spécialement Samir ELIAS, mon oncle parental. J'apprécie beaucoup tes conseils puisés dans les liens très affectifs de la famille : ton assistance me donne un esprit de force, de sagesse et de maîtrise de soi.

Mes dernières et plus profondes pensées iront vers ma famille ; à mon père Pierre et à ma mère Yolla qui font jaillir en moi un flot d'espérance. Par votre travail en équipe, vos échanges précieux, par votre bon principe, vous avez été depuis toujours pour moi le Guide, le Protecteur, le Pacificateur que rien ne lasse ... et par votre tendresse, vous m'avez montré l'idéal. Ma joie augmente à la pensée de trouver toujours à côté de moi ma sœur Dona, une médiatrice qui me fortifie dans mes faiblesses, me console dans mes peines et me guide dans mes bonnes résolutions. Et finalement, je remercie celui chez qui je trouve toujours bon accueil dans le fond de son cœur ; merci à toi cher Michel, mon frère, mon appui ...

*Rana ELIAS*

# Résumé

L'évaluation des modifications des caractéristiques d'un système dynamique non-stationnaire est étudiée suivant les modifications des paramètres modaux. Pour cela, nous étudions en premier l'obtention de ces paramètres, à l'aide des méthodes d'identification à partir des réponses vibratoires mesurées. Trois méthodes d'identification sont étudiées : la méthode de Décomposition Orthogonale Propre (POD), la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) et la méthode de Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD). Ensuite, trois étapes sont considérées pour suivre les changements de masse des systèmes non-stationnaires à partir des variations des paramètres modaux : la localisation de l'instant du changement (étape 1), la détection de la position du changement (étape 2) et la quantification de la valeur du changement (étape 3). Pour l'étape 1, la transformée en ondelettes (TO) qui est une analyse temps-fréquence est appliquée. Ensuite, trois méthodes de détection de la position du changement de la masse sont développées dans l'étape 2. Enfin, la variation relative des fréquences propres est utilisée pour la quantification de la variation relative de la masse dans l'étape 3. Toutes ces méthodes ont été testées numériquement. De plus une maquette simplifiée de bâtiment a été instrumentée sous excitations de choc. Ces essais ont permis de valider les méthodes développées dans cette thèse.

*Mots clefs* : système dynamique, identification modale, paramètres modaux, décomposition orthogonale, transformée en ondelettes, transformée de Fourier.



# Abstract

Modification of modal parameters is considered the main tool for the evaluation of characteristic changes of a non stationary dynamic system. Therefore, our first interest is to obtain these modal parameters from vibration measures using identification methods. Three methods are discussed here : Proper Orthogonal Decomposition (POD), Singular Value Decomposition (SVD) and Smooth Orthogonal Decomposition (SOD). Then, in order to evaluate the mass changes in non stationary systems, three steps are proposed : instant localization of mass changes (step 1), determination of geometrical location of the mass changes (step 2) and quantification of mass changes (step 3). The Wavelet transform (WT), considered to be a time-frequency analysis, is indented in step 1. In step 2, three methods for the detection of the position of the mass changes are developed. Finally, the relative variation of the natural frequencies of the system is used to evaluate the relative variation of the mass in step 3. The efficiency of these methods is verified by numerical tests. Moreover a building experimental model, instrumented with accelerometers, is studied in the case of after-shock vibrations. These experimental tests permit to validate the methods proposed in this thesis.

*Keywords* : dynamic systems, modal identification, modal parameters, orthogonal decomposition, wavelet transform, Fourier Transform.



# Table des matières

Acronymes	xvii
Table des figures	xix
Liste des tableaux	xxvi
Glossaire	xxvii
Introduction générale	xxix
<b>1 Présentation de la thèse</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Problème inverse . . . . .	4
1.2.1 Présentation du problème inverse considéré . . . . .	4
1.2.2 POD, SVD et SOD pour l'identification des paramètres modaux . . . . .	5
1.3 Méthodes de détection et de localisation de la modification . . . . .	7
1.4 Démarche de la recherche . . . . .	7
<b>2 Problème direct : système dynamique linéaire discret</b>	<b>9</b>
2.1 Système dynamique linéaire d'ordre 2 à $n$ d.d.l . . . . .	11
2.2 Résolution du système dynamique . . . . .	12
2.2.1 Modes propres et résolution du système homogène . . . . .	12
2.2.2 Modes propres et résolution du système non homogène . . . . .	15
2.3 Conclusion . . . . .	17
<b>3 Méthodes de décomposition orthogonale basées sur la corrélation</b>	<b>19</b>
3.1 Décomposition Orthogonale Propre (POD) . . . . .	21
3.2 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) . . . . .	22
3.3 Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD) . . . . .	24
3.4 Comparaison et analyse critique de ces méthodes . . . . .	25
3.5 Comment trouver les modes propres avec une précision fixée . . . . .	26

3.5.1	Choix de la fréquence d'échantillonnage . . . . .	27
3.5.2	Choix du temps d'observation total $T$ . . . . .	28
3.6	Conclusion . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Transformée en ondelettes continue</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	37
4.2	Historique . . . . .	37
4.3	De la transformée de Fourier à la transformée en ondelettes . . . . .	39
4.4	La transformée en ondelettes continue de Cauchy . . . . .	42
4.4.1	L'ondelette mère de Cauchy ou de Paul et la TOCC . . . . .	42
4.4.2	Les effets de bords . . . . .	43
4.4.3	Extraction des arêtes . . . . .	44
4.5	Estimation des paramètres modaux . . . . .	46
4.5.1	Cas de la pseudo-pulsation propre . . . . .	47
4.5.2	Cas du taux d'amortissement . . . . .	47
4.6	Conclusion . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Problématique étudiée</b>	<b>49</b>
5.1	Introduction . . . . .	51
5.2	Présentation de l'étude . . . . .	51
5.2.1	Problème dynamique sans amortissement . . . . .	55
5.2.2	Choix du type de données de mesures . . . . .	56
5.3	Matrice de rigidité . . . . .	57
5.3.1	Cas général . . . . .	57
5.3.2	Cas particulier . . . . .	58
5.4	Conclusion . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Localisation en temps des modifications de la masse</b>	<b>61</b>
6.1	Détection de la modification : Étape 1 . . . . .	63
6.2	Exemples numériques . . . . .	63
6.2.1	Augmentations des masses locales d'un système . . . . .	64
6.2.2	Diminutions des masses locales d'un système . . . . .	72
6.3	Conclusion . . . . .	81

<b>7</b>	<b>Détection de la position de la modification de la masse</b>	<b>83</b>
7.1	Introduction . . . . .	85
7.2	Recherche de la position connaissant les modes propres avant et après le changement de la masse . . . . .	85
7.2.1	Permutation des modes propres . . . . .	85
7.2.2	Méthodes de recherche de la position de la modification . . . . .	89
7.3	Comparaison des trois méthodes sur des exemples numériques . . . . .	91
7.4	Conclusion . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Quantification des modifications de la masse</b>	<b>99</b>
8.1	Introduction . . . . .	101
8.2	Description des essais numériques . . . . .	102
8.3	Analyse numérique préalable . . . . .	103
8.3.1	Cas des systèmes ayant subi des augmentations de leurs masses locales . . . . .	107
8.3.2	Cas des systèmes ayant subi des diminutions de leurs masses locales . . . . .	109
8.3.3	Cas des systèmes ayant subi plusieurs augmentations et diminutions de leurs masses locales . . . . .	111
8.4	Conclusion . . . . .	113
<b>9</b>	<b>Mise en œuvre expérimentale</b>	<b>115</b>
9.1	Introduction . . . . .	117
9.2	Description de l'expérience . . . . .	117
9.3	Analyse des données de mesure . . . . .	120
9.4	Recherche de la position de l'ajout de la masse . . . . .	125
9.4.1	Un ajout de masse de 2,5 % de la masse totale . . . . .	126
9.4.2	Un ajout de masse de 5 % de la masse totale . . . . .	130
9.4.3	Un ajout de masse de 7,5 % de la masse totale . . . . .	130
9.4.4	Variation de l'étage d'excitation . . . . .	132
9.5	Estimation de la variation relative de la masse . . . . .	132
9.5.1	Un ajout de 12 % de la cinquième masse . . . . .	133
9.5.2	Un ajout de 25 % de la deuxième masse . . . . .	134
9.5.3	Un ajout de 38 % de la quatrième masse . . . . .	135
9.5.4	Trois ajouts de 12 % chacun . . . . .	136
9.6	Conclusion . . . . .	137
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>138</b>
	<b>Annexes</b>	<b>143</b>



<b>A</b>	<b>Décomposition de la matrice de réponse X suivant une SVD pour le cas d'un système conservatif</b>	<b>145</b>
<b>B</b>	<b>Évaluation numérique d'une modification de la masse d'un système dynamique</b>	<b>153</b>
<b>C</b>	<b>Les fréquences calculées par la FFT des essais expérimentaux</b>	<b>159</b>
<b>D</b>	<b>Recherche de la position de l'ajout de la masse</b>	<b>163</b>
D.1	Un ajout de masse de 5 % de la masse totale . . . . .	163
D.2	Un ajout de masse de 7,5 % de la masse totale . . . . .	166
D.3	Variation de l'étage d'excitation . . . . .	169
	<b>Bibliographie</b>	<b>172</b>

# Acronymes

<b>TF</b>	Transformée de Fourier	(Fourier Transform)
<b>LNМ</b>	Mode propre linéaire	(Linear Normal Mode)
<b>MAC</b>	Matrice de corrélation modale	(Modal Assurance Criterion)
<b>PCA</b>	Analyse en composantes principales	(Principal Component Analysis)
<b>POD</b>	Décomposition orthogonale en modes propres	(Proper Orthogonal Decomposition)
<b>POM</b>	Mode propre orthogonal	(Proper Orthogonal Mode)
<b>POV</b>	Valeur propre orthogonale	(Proper Orthogonal Value)
<b>SVD</b>	Décomposition en valeurs singulières	(Singular Value Decomposition)
<b>SOD</b>	Décomposition orthogonale régularisée	(Smooth Orthogonal Decomposition)
<b>TO</b>	Transformée en ondelettes	(Wavelet Transform)



# Table des figures

4.1	Résolution en temps et en fréquence : (a) de la fonction analysante $\psi(t)$ et (b) de la fonction $b$ -translatée et $a$ -dilatée avec $b$ quelconque et $a > 0$ [21]. . . . .	41
4.2	Représentations temporelle, fréquentielle et temps-fréquence du signal étudié. . . .	45
4.3	Les deux arêtes du signal $x(t) = e^{-t} \sin(2\pi.3t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi.(t^2 + 4t))$ . . . . .	46
4.4	Le squelette du signal (échelle logarithmique) : $\ln  T_{\psi_n}[x_k(t)](b, a_{rk}(b)) $ pour $k$ variant de 1 à 2. . . . .	47
5.1	Schématisation des 3 étapes de l'évolution du système. . . . .	52
5.2	Identification des caractéristiques des systèmes à 1 ou à 2 états. . . . .	53
5.3	Schématisation des trois périodes $E_0$ , $E_T$ et $E_1$ au cours du temps $[0; T]$ . . . . .	54
5.4	Système masse-ressort encastré-encastré à $n$ masses $m_i$ et à $n + 1$ ressorts de raideur $k_s$ . . . . .	57
5.5	Système masse-ressort encastré-libre à $n$ masses $m_i$ et à $n$ ressorts de raideur $k_i$ . .	58
5.6	Système masse-ressort encastré-encastré à $n$ masses $m$ et à $n + 1$ ressorts de raideur $k$ . 58	
5.7	Système masse-ressort encastré-libre à $n$ masses $m$ et à $n$ ressorts de raideur $k$ . . .	59
6.1	La TO des accélérations du système ayant subi une augmentation de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation. . . . .	65
6.2	La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une augmentation de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation. 66	
6.3	La TO des accélérations du système ayant subi une augmentation de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation. . . . .	68
6.4	La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une augmentation de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation. . . . .	68
6.5	La TO des accélérations du système ayant subi une augmentation de masse après 10 minutes (600 secondes) puis une deuxième augmentation de masse après 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation. . . . .	70
6.6	La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi des augmentations de deux masses après 10 minutes (600 secondes) puis après 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation. . . . .	71

6.7	La TO des accélérations du système ayant subi une diminution de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation. . . . .	74
6.8	La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une diminution de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation. . .	74
6.9	La TO des accélérations du système ayant subi une diminution de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation. . . . .	76
6.10	La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une diminution de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation. .	78
6.11	La TO des accélérations du système ayant subi deux diminutions successives de masse : la première après 10 minutes (600 secondes) et la deuxième après 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation. . . . .	79
6.12	La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi deux diminutions de masses après 10 minutes (600 secondes) puis 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation. . . . .	80
7.1	Représentation en 2D des valeurs de la matrice $MAC$ de l'équation (7.2). . . . .	86
7.2	Représentation en 2D des valeurs de la matrice $MAC$ de l'équation (7.5). . . . .	88
7.3	Représentation du calcul de la permutation des modes propres, de la matrice de différence $\Delta$ et des vecteurs $Max$ et $Ind$ . . . . .	90
7.4	Détection de la position de la modification de la masse. Augmentation forte de 80% de la masse locale au niveau de la masse 4. . . . .	92
7.5	Détection de la position de la modification de la masse. Diminution de 80% de la masse locale au niveau de la masse 4. . . . .	93
7.6	Détection de la position de la modification de la masse. Augmentation de 20% de la masse locale au niveau de la masse 6. . . . .	94
7.7	Détection de la position de la modification de la masse. Diminution de 20% de la masse locale au niveau de la masse 6. . . . .	95
7.8	Détection de la position de la modification de la masse. Augmentation de 10% de la masse locale au niveau des masses 5 et 9. . . . .	96
7.9	Détection de la position de la modification de la masse. Diminution de 80% de la masse locale au niveau des masses 2 et 5. . . . .	97
8.1	Les fréquences avant et après une augmentation de 50 % de la masse locale à la 33 <sup>ème</sup> position. . . . .	104
8.2	Les fréquences avant et après une diminution de 50 % de la masse locale à la 33 <sup>ème</sup> position. . . . .	104
8.3	Les fréquences avant et après une diminution simultanée de 50 % de la masse locale sur les positions 5, 33 et 62. . . . .	105
8.4	Les trois derniers modes avant (en bleu étoilé) et après (en rouge cerclé) une diminution de 50% des masses locales sur les positions 5, 33 et 62 : (a) les modes 100, (b) les modes 99 et (c) les modes 98. . . . .	106

8.5	En rouge, le tracé de $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à une augmentation de 50 % de la masse locale sur la 33 <sup>ème</sup> position.	107
8.6	En rouge, les tracés de $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ , $\frac{2\Delta m_+}{m_T}$ et $\frac{3\Delta m_+}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à trois augmentations respectives de 90 % de la masse locale sur les 5 <sup>ème</sup> , 15 <sup>ème</sup> et 33 <sup>ème</sup> masses. . . . .	108
8.7	En rouge, le tracé de $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à une diminution de 50 % de la masse locale sur la 33 <sup>ème</sup> masse.	110
8.8	En rouge, les tracés de $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ , $-\frac{2\Delta m_-}{m_T}$ et $-\frac{3\Delta m_-}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à trois diminutions sur les 5 <sup>ème</sup> , 15 <sup>ème</sup> et 33 <sup>ème</sup> masses de 90 % de la masse locale de chacune des celles-ci. . . . .	111
8.9	En rouge, les tracés de 0, $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ , $\frac{2\Delta m_+}{m_T}$ , $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ , $-\frac{2\Delta m_-}{m_T}$ et $-\frac{3\Delta m_-}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à deux augmentations de 60 % de la masse locale sur les 5 <sup>ème</sup> et 33 <sup>ème</sup> masses et à trois diminutions de 40 % de la masse locale sur les 62 <sup>ème</sup> , 78 <sup>ème</sup> et 84 <sup>ème</sup> masses. . . . .	112
9.1	Dispositif composé de 5 étages liés par des lames. . . . .	119
9.2	Cinq capteurs d'accélération attachés à chaque étage. . . . .	119
9.3	Marteau utilisé pour engendrer la force extérieure. . . . .	120
9.4	La carte d'acquisition avec des modules de 4 entrées chacun. . . . .	120
9.5	Les essais effectués suivant la valeur de l'ajout de la masse, la position de chaque ajout, l'étage d'excitation et le nombre d'essais. . . . .	121
9.6	Tracé de la courbe du vecteur force en fonction du temps d'observation en secondes.	122
9.7	Tracé de la courbe du vecteur de déplacement du cinquième étage en fonction du temps d'observation enregistré à l'aide du capteur laser. . . . .	123
9.8	Tracé des courbes des vecteurs d'accélération de chacun des 5 étages en fonction du temps d'observation. . . . .	123
9.9	Nombre de points à enlever avant l'impact du choc. . . . .	124
9.10	Coefficient d'amortissement en pourcentage de chaque accélération pour les trois essais.	124
9.11	Cas idéal pour la détection de la position 3 du changement de la masse en utilisant les résultats de la méthode OI, de la méthode EC et de la méthode EM. . . . .	126
9.12	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_1$ sur le premier étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	127
9.13	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_1$ sur le deuxième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	127
9.14	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_1$ sur le troisième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	128
9.15	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_1$ sur le quatrième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	128

9.16	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_1$ sur le cinquième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	129
9.17	Coefficient d'amortissement en pourcentage, en bleu, des accélérations des masses du système ayant subi un ajout de $\Delta m_3$ sur l'étage 4. En rouge, l'amortissement moyen entre les 5 masses pour chacun des trois essais. . . . .	131
9.18	L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi un ajout de $\Delta m_1$ sur la cinquième masse locale. . . . .	134
9.19	L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi un ajout $\Delta m_2$ sur la deuxième masse locale. . . . .	135
9.20	L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi un ajout de $\Delta m_3$ sur la quatrième masse locale. . . . .	136
9.21	L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi trois ajouts successifs de la masse $\Delta m_1$ sur chacun des cinq étages. . . .	137
B.1	La TO des accélérations du système ayant subi une diminution d'une masse après 30 minutes (1800 secondes) du début de l'observation. . . . .	154
B.2	Calcul des fréquences par la TO suivant 10 bandes de fréquences différentes. . . . .	155
B.3	Détection de la position de la masse du système ayant subi une diminution de 40% de la septième masse locale. . . . .	156
B.4	Le tracé des fréquences avant et après une diminution de la septième masse de 40% de la masse locale de celle-ci. . . . .	157
B.5	En rouge, le tracé de $\frac{\Delta m}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à une diminution de la septième masse de 40 % de la masse locale de celle-ci. . . . .	158
D.1	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_2$ sur le premier étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	164
D.2	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_2$ sur le deuxième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	164
D.3	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_2$ sur le troisième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	165
D.4	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_2$ sur le quatrième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	165
D.5	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_2$ sur le cinquième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	166
D.6	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le premier étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	167
D.7	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le deuxième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	167
D.8	Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le troisième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	168

D.9 Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le quatrième étage et en tapant sur le troisième étage. . . . .	168
D.10 Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le cinquième étage et en tapant sur le troisième étage . . . . .	169
D.11 Recherche de la position après un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le quatrième étage et en tapant sur le premier étage. . . . .	170
D.12 Recherche de la position après un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le quatrième étage et en tapant sur le deuxième étage. . . . .	170
D.13 Recherche de la position après un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le quatrième étage et en tapant sur le quatrième étage. . . . .	171
D.14 Recherche de la position après un ajout de la masse $\Delta m_3$ sur le quatrième étage et en tapant sur le cinquième étage. . . . .	171





# Liste des tableaux

4.1	Ondelette mère de Cauchy - Définitions . . . . .	43
6.1	Les fréquences en $Hz$ obtenues par la TO avant et après une augmentation de masse de $\Delta m = 1 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,05$ . . . . .	66
6.2	Les fréquences en $Hz$ obtenues par la TO avant et après une augmentation de deux masses, en un même instant, de $\Delta m = 2 \times 1,2 = 2,4 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,12$ . . . .	69
6.3	Les fréquences en $Hz$ obtenues par la TO avant et après deux augmentations de masse, en deux instants différents, de la masse $\Delta m_1 = 0,6 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m_1}{m_T} = 0,03$ puis de la masse $\Delta m_2 = 1,2 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m_2}{m_T} = 0,06$ . . . . .	72
6.4	Les fréquences en $Hz$ obtenues par la TO avant et après une diminution de masse de $\Delta m = 1 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,05$ . . . . .	75
6.5	Les fréquences en $Hz$ obtenues par la TO avant et après la diminution simultanée de deux masses de $\Delta m = 1,2 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,06$ . . . . .	77
6.6	Les fréquences en $Hz$ obtenues par la TO avant et après deux diminutions, en deux instants différents, de la masse $\Delta m_1 = 0,6 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m_1}{m_T} = 0,03$ et de la masse $\Delta m_2 = 1,2 \text{ kg}$ tel que $\frac{\Delta m_2}{m_T} = 0,06$ . . . . .	81
9.1	Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout $\Delta m_1$ sur chacun des cinq étages successivement et en tapant sur le troisième étage. . . . .	129
9.2	Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout $\Delta m_2$ sur chacun des cinq étages successivement et en tapant sur le troisième étage. . . . .	130
9.3	Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout $\Delta m_3$ sur chacun des cinq étages successivement et en tapant sur le troisième étage. . . . .	131

9.4	Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout $\Delta m_3$ sur l'étage 4 et en tapant sur chacun des cinq étages successivement.	
	.....	132
9.5	Les cinq fréquences calculées par la FFT du vecteur accélération de chacun des 5 masses.	133
9.6	Probabilité totale de l'efficacité des trois méthodes pour tous les essais expérimentaux étudiés dans ce chapitre.	138
B.1	Les fréquences obtenues par la TO avant et après une diminution d'une masse locale de $\Delta m = 2 \text{ Kg}$ tel que $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,04$ .	155
C.1	Les fréquences moyennes en $Hz$ obtenues par la FFT à l'état initial du système.	159
C.2	Les fréquences moyennes obtenues en $Hz$ par la FFT après un ajout de $\Delta m_1$ sur chacun des 5 étages.	160
C.3	Les fréquences moyennes obtenues en $Hz$ par la FFT après un ajout de $\Delta m_2$ sur chacun des 5 étages.	160
C.4	Les fréquences moyennes obtenues en $Hz$ par la FFT après un ajout de $\Delta m_3$ sur chacun des 5 étages.	160
C.5	Les fréquences obtenues en $Hz$ par la FFT après un ajout de $\Delta m_3$ sur le quatrième étage en excitant les étages 1, 2, 4 et 5.	161

# Glossaire

<b>M</b>	matrice de masse symétrique, définie et positive	$(n \times n)$
<b>C</b>	matrice d'amortissement	$(n \times n)$
<b>K</b>	matrice de rigidité symétrique, définie et positive	$(n \times n)$
<b>X</b>	matrice de déplacement	$(n \times m)$
<b>A</b>	matrice carrée symétrique, définie et positive	$(n \times n)$
<b>P</b>	matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs propres de <b>A</b>	$(n \times n)$
<b>D</b>	matrice diagonale des valeurs propres de <b>A</b>	$(n \times n)$
$\phi$	matrice modale des vecteurs propres $\varphi_i$	$(n \times n)$
<b>R</b>	matrice de corrélation t.q. $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X}$	$(n \times n)$
$\psi$	matrice des POMs (vecteurs propres de <b>R</b> )	$(n \times n)$
<b>U</b>	matrice orthogonale des vecteurs singuliers à gauche	$(n \times n)$
$\Sigma$	matrice pseudo-diagonale des valeurs singulières	$(n \times m)$
<b>V</b>	matrice orthogonale des vecteurs singuliers à droite	$(m \times m)$
<b>I</b>	matrice identité	$(n \times n)$
<b>z</b>	vecteur des forces extérieures	$(n)$
<b>x</b>	vecteur de déplacement en fonction du temps $t$	$(n)$
$\dot{\mathbf{x}}$	vecteur dérivée de <b>x</b> par rapport au temps	$(n)$
$\ddot{\mathbf{x}}$	vecteur dérivée seconde de <b>x</b> par rapport au temps	$(n)$
$\varphi_i$	vecteurs propres de $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ ( $1 \leq i \leq n$ )	$(n)$
<b>q</b>	vecteur de transformation de base	$(n)$
$p_i$	vecteurs propres de <b>A</b> ( $1 \leq i \leq n$ )	$(n)$
$\psi_i$	vecteurs propres de <b>R</b> ( $1 \leq i \leq n$ )	$(n)$
<b>r</b>	vecteur de transformation de base	$(n)$
<b>s</b>	vecteur de transformation de base	$(n)$
<b>f</b>	vecteur des forces	$(n)$
$\mathbf{u}_i$	vecteurs singuliers à gauche de $\mathbf{X}^T$ ( $1 \leq i \leq n$ )	$(n)$
$\mathbf{v}_i$	vecteurs singuliers à droite de $\mathbf{X}^T$ ( $1 \leq i \leq n$ )	$(m)$
$n$	degré de liberté	
$m$	nombre d'échantillons en temps	
$m_{ij}$	composantes de la matrice <b>M</b> ( $1 \leq i, j \leq n$ )	
$c_{ij}$	composantes de la matrice <b>C</b> ( $1 \leq i, j \leq n$ )	
$k_{ij}$	composantes de la matrice <b>K</b> ( $1 \leq i, j \leq n$ )	
$\omega$	pulsation	
$\theta$	déphasage	

$\lambda_i$	valeurs propres du système ( $1 \leq i \leq n$ )
$\boldsymbol{\mu}_i$	valeurs propres de $\mathbf{R}$ ( $1 \leq i \leq n$ )
$\zeta_i$	amortissement du mode $i$ ( $1 \leq i \leq n$ )
$\boldsymbol{\sigma}_i$	valeurs singulières de $\mathbf{X}^T$ ( $1 \leq i \leq n$ )
$r$	rang de la matrice $\mathbf{A}$
$h$	réponse impulsionnelle

# Introduction générale

Le temps, les phénomènes naturels, les guerres, ont tous une influence sur les caractéristiques des structures et leur résistance. Pour conserver le bagage culturel de chaque région, la protection des monuments historiques est très importante. De plus, évaluer les endommagements de toutes constructions (bâtiments, ponts, etc.) est une nécessité pour les restaurer et pour prendre des mesures de protection afin d'anticiper des catastrophes humaines. Ainsi, étudier les structures et détecter tout changement de leurs caractéristiques, revêt une importance capitale.

S'il est plus simple de faire ces études en laboratoires, il est toutefois impossible d'y transporter des monuments comme des bâtiments. De plus, en général, pour faire de telles études, le système doit être mis hors service pendant une certaine durée de temps, ce qui peut causer des perturbations (de trafics routiers par exemple, s'il s'agit d'un pont), ou des pertes financières. D'où l'intérêt de développer des méthodes qui permettent une analyse non-destructive, *i.e.* une analyse se faisant sur place sans déplacement des systèmes et si possible sans les mettre hors service. Ce type d'analyses attire de plus en plus l'attention des industriels puisqu'il permet d'évaluer et de prédire le fonctionnement des structures sans les endommager. Avec le développement rapide des technologies, l'analyse non-destructive est devenue très utile dans divers domaines, tels la résistance des structures face aux activités sismiques, aux vents violents, etc. Cette analyse repose sur l'étude des données de mesures réalisées sous sollicitation extérieure pouvant être obtenue par vibration mécanique, par rayonnement électromagnétique, etc.

La recherche sur l'identification des endommagements basée sur la vibration a connu une expansion rapide au cours des dernières années. Le principe de ces méthodes se base sur l'étude des paramètres modaux (les fréquences et modes propres, et l'amortissement modal), qui sont des fonctions des propriétés physiques de la structure (la masse, l'amortissement et la rigidité). Par conséquent, les changements dans les propriétés physiques provoquent des changements détectables dans les propriétés modales.

Le problème auquel nous nous intéressons dans notre étude, consiste d'abord à approcher les caractéristiques modales des structures puis à détecter et évaluer toute variation de masse du système. Ainsi, nous cherchons à déterminer l'instant, la position et la valeur du changement de masse par rapport à l'état initial du système.

Si nous connaissons les propriétés physiques des structures, la détermination de leurs caractéristiques modales et de leurs réponses vibratoires est assez simple et classique (chapitre 2). Or en pratique, nous ne disposons pas de ces informations. C'est pourquoi, nous cherchons à approcher les caractéristiques modales des structures en n'ayant pour données initiales que la matrice des données de mesures vibratoires du système. En effet, grâce à ces données, nous pouvons créer une matrice appelée matrice de corrélation, dont les vecteurs propres peuvent approcher les modes propres de la structure. Ainsi, pour pouvoir approcher ces modes qui sont orthogonaux, nous nous sommes intéressés aux méthodes de décomposition orthogonale basées sur la corrélation.

Nous avons étudié en particulier trois méthodes : la Décomposition Orthogonale Propre (POD), la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) et la Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD). Après une description détaillée et une analyse critique de chacune de ces méthodes (chapitre 3), nous avons cherché à obtenir des conditions précises pour l'application de la POD afin d'obtenir des approximations avec une précision donnée.

Une fois que les paramètres modaux sont approchés, nous pouvons alors analyser leur évolution, sachant que celle-ci résulte des modifications des caractéristiques physiques des systèmes.

Ainsi, nous utilisons et développons différentes méthodes basées sur la variation des fréquences et des modes propres afin de détecter l'instant, la position et la valeur de tout changement de masse (chapitres 6, 7 et 8). La résolution de cette problématique qui est présentée dans le chapitre 5, nécessite la connaissance de l'évolution en temps des fréquences propres du système. Comme la transformée de Fourier est incapable de nous donner de telles informations, nous nous sommes intéressés aux analyses temps-fréquences, et en particulier à la transformée en ondelettes (chapitres 4 et 6).

Les méthodes développées dans cette thèse sont particulièrement intéressantes tant d'un point de vue théorique que d'un point de vue pratique, étant donné qu'elles ne nécessitent pas d'effectuer des mesures coûteuses. De plus, nous avons prouvé l'efficacité de ces méthodes en les appliquant sur des données expérimentales obtenues en laboratoires (chapitre 9).

# Chapitre 1

## Présentation de la thèse

---

**C**E CHAPITRE présente le problème de la détection et de l'évaluation des modifications des caractéristiques d'un système dynamique linéaire. Cette étude est basée sur l'identification des caractéristiques modales à partir de réponses vibratoires mesurées. Trois méthodes sont étudiées plus particulièrement et comparées.

---



PLAN DU CHAPITRE 1

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Problème inverse</b>	<b>4</b>
1.2.1	Présentation du problème inverse considéré	4
1.2.2	POD, SVD et SOD pour l'identification des paramètres modaux	5
<b>1.3</b>	<b>Méthodes de détection et de localisation de la modification</b>	<b>7</b>
<b>1.4</b>	<b>Démarche de la recherche</b>	<b>7</b>

---

## 1.1 Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier si à partir de mesures vibratoires, on peut identifier les paramètres modaux d'un système dynamique, pour ensuite détecter, localiser et estimer les modifications des caractéristiques de ce système.

Notre étude est centrée sur les systèmes dynamiques linéaires discrets puisque le traitement numérique conduit à discrétiser les systèmes continus. Il s'agit d'étudier les modifications des caractéristiques de ces systèmes. Leurs caractéristiques sont considérées constantes durant un certain temps d'observation. Mais ces caractéristiques peuvent subir un changement brutal comme la rupture d'un fil dans un câble ou un changement lent comme l'apparition de la rouille. Mais avant et après ce changement, le système peut être considéré comme stationnaire pendant le temps de la mesure du comportement vibratoire. En conclusion il y a deux échelles de temps : la durée de vie de la structure d'une part et la durée d'une instrumentation pour faire des mesures d'autre part.

L'identification de ces caractéristiques peut être :

- une identification des paramètres mécaniques (matrice de masse  $\mathbf{M}$ , matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  et matrice de rigidité  $\mathbf{K}$ ),
- une identification des paramètres modaux (fréquences propres, modes propres et coefficient d'amortissement).

Les caractéristiques mécaniques d'un système dynamique linéaire à  $n$  degrés de liberté, de type masse-ressort amortisseur, ne sont pas en général accessibles à une mesure directe. Par contre on peut assez facilement mesurer les réponses vibratoires et à partir des ces réponses en déduire les paramètres modaux : fréquences propres, modes propres et coefficients d'amortissement.

Cette identification permet de connaître l'état actuel d'un système et de le comparer avec l'état initial. Chaque modification est étudiée selon les trois étapes suivantes :

- Étape 1 : localisation en temps de la variation,
- Étape 2 : localisation en espace de la variation,
- Étape 3 : quantification de la variation.

L'analyse de ces trois étapes effectuée dans cette thèse pour des systèmes dynamiques linéaires discrets a pour but de servir aux ingénieurs dans la prédiction des modifications de leurs structures.

Que ce soient des bâtiments, des câbles, des ponts ou tout autre structure, l'analyse non destructive des problèmes mécaniques est une nécessité contre tout risque ou endommagement possibles. Il est vrai que tous ces systèmes mécaniques sont en réalité continus, mais grâce à la méthode des éléments finis, la discrétisation en espace permet de récupérer ces systèmes en dimension finie à  $n$  d.d.l; d'où le choix de l'étude des systèmes discrets.

Comme on l'a déjà mentionné, rechercher des caractéristiques des systèmes linéaires revient à trouver les fréquences propres, les modes propres et les coefficients d'amortissement dans le cas des systèmes amortis. Une première partie de la recherche dans la littérature bibliographique consiste à présenter des méthodes d'identification des paramètres de tels systèmes.

La recherche des caractéristiques de ces systèmes est un problème qui se présente sous deux formes : la première qu'on appelle le "problème direct" et la deuxième le "problème indirect". Le problème direct consiste à supposer connue les matrices initiales du système dans le but de calculer sa réponse vibratoire. Pourtant sur le plan pratique, que ce soit face à des câbles, des ponts ou des bâtiments, on ne connaît pas l'état initial. On ne possède que les signaux oscillatoires fournis par des capteurs de déplacement, de vitesse ou d'accélération. D'où le problème indirect, aussi appelé

problème inverse par les mathématiciens. En fait, c'est le problème qui consiste à s'appuyer sur les résultats de la vibration du système pour trouver les paramètres modaux caractérisant la nature et l'état de celui-ci.

La présentation du problème indirect des systèmes stationnaires est donnée dans le paragraphe 1.2.1. Les méthodes d'identification des paramètres modaux, trouvées dans la littérature scientifique, sont présentées et analysées dans le paragraphe 1.2.2. En supposant, tout au long de cette thèse, que la rigidité est toujours constante, nous considérons pour la suite que la ou les masses locales changent au cours du temps. Nous cherchons également les méthodes utilisées pour la détection et la localisation d'une modification de masse dans le paragraphe 1.3. Enfin, nous mettons en évidence les points faibles des méthodes de la littérature et nous introduisons le plan de la thèse dans le paragraphe 1.4.

## 1.2 Problème inverse

L'analyse du problème inverse est une analyse des données de mesure enregistrées grâce à des capteurs de déplacement, de vitesse ou d'accélération ; en exerçant des sollicitations mécaniques à distance ou de contact. Ainsi, on ne dispose pas des matrices de masse, de rigidité ni d'amortissement d'un système mais uniquement de sa matrice de réponse. Le problème revient à déterminer, à partir des observations expérimentales (la matrice de réponse mesurée) la nature du système ; c'est un problème inverse.

En général, la résolution de ce problème inverse est précédée par une étape dite problème direct, qui décrit le comportement des paramètres des systèmes. C'est un problème classique de résolution de systèmes d'équations différentielles.

Ensuite, le problème consiste en l'identification des caractéristiques du système connaissant son état actuel. Cette identification peut être soit paramétrique soit non paramétrique. Le premier cas porte sur l'identification des paramètres mécaniques (matrices de masse, de rigidité et d'amortissement), et le second sur la recherche des caractéristiques vibratoires du système (fréquences propres et modes propres) ; c'est le problème de l'identification des paramètres modaux.

On s'intéresse dans notre étude à l'identification des paramètres modaux. Des méthodes d'identification des paramètres modaux utilisées et développées par les chercheurs sont décrites dans le paragraphe 1.2.2.

### 1.2.1 Présentation du problème inverse considéré

Le problème inverse considéré consiste en la détermination des paramètres vibratoires d'un système dynamique. En pratique, les caractéristiques mécaniques du système dynamique considéré sont inconnues, et les données expérimentales sont les réponses du système à certaines sollicitations. Les données mesurées sont discrétisées en temps. Si  $n$  est le nombre de d.d.l et si l'échantillonnage en temps est  $t_1, \dots, t_m$ , la matrice des données  $\mathbf{X}$  est de dimension  $n \times m$ .

Ne supposant connaître que cette matrice des données de mesure, les scientifiques cherchent des méthodes d'identification des paramètres qui permettent de caractériser le système ayant  $\mathbf{X}$  pour matrice de réponse.

Pour pouvoir bien caractériser ce système, nous avons besoin de récupérer tous les paramètres modaux : les fréquences propres, les modes propres et les coefficients d'amortissement du système.

Dans ce qui suit, nous présentons des méthodes basées sur l'utilisation de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}$  des réponses libres mesurées. Dans le paragraphe suivant, une étude bibliographique a été réalisée concernant certaines de ces méthodes, leurs propriétés respectives ainsi que leurs applications dans différents domaines.

### 1.2.2 POD, SVD et SOD pour l'identification des paramètres modaux

Notre but est de chercher différentes méthodes d'approximation des modes propres d'un système dynamique. Nous travaillons avec des systèmes dynamiques ayant des modes propres orthogonaux par rapport à un certain produit scalaire lié à la matrice de masse. D'où les méthodes de décomposition orthogonale qui peuvent approcher les modes propres du système notés POMs (Proper Orthogonal Modes). Nous nous intéressons donc aux méthodes de décomposition en base orthogonale qui interviennent dans différents cas [54] :

– Le cas continu :

C'est le cas des systèmes de cordes vibrantes, de câbles ou de poutres, etc., ayant un nombre infini de d.d.l. La méthode de décomposition proposée est la décomposition de Karhunen-Loève (KLD - Karhunen-Loève Decomposition) qui s'applique dans le cas des systèmes continus [6]. Les POMs récupérés avec la KLD sont des fonctions orthogonales par rapport à un produit scalaire avec un poids variant avec la densité linéique. Une deuxième méthode de décomposition en vecteurs propres est étudiée dans [8, 64] et qui est applicable pour des systèmes ayant  $n$  (d.d.l) considérablement plus grand que le nombre d'échantillons testés. De tels systèmes sont considérés continus vu que la discrétisation en espace est très fine.

– Le cas probabiliste :

Ayant une base de données probabilistes, deux méthodes sont suggérées : l'analyse en composantes principales (PCA - Principal Component Analysis) et l'analyse en composantes indépendantes (ICA - Independent Component Analysis). La PCA consiste à effectuer une décomposition orthogonale par rapport à une certaine probabilité pour obtenir des POMs qui sont des fonctions décrivant des événements probabilistes. L'ICA se base sur le même principe que la PCA, mais s'utilise pour des données de probabilités ayant leur valeur moyenne nulle. Ces deux méthodes sont souvent appliquées pour la détection d'endommagement [38, 78, 81] pour les cas linéaires [36, 37, 47], et pour la localisation de l'endommagement [66, 67].

– Le cas discret :

Pour des systèmes issus de problèmes continus discrétisés ou directement discrets, plusieurs méthodes de décomposition orthogonale ont été développées et testées numériquement. En particulier, nous citons les trois méthodes les plus connus [52] : la décomposition orthogonale propre (POD - Proper Orthogonal Decomposition), la décomposition en valeurs singulières (SVD - Singular Value Decomposition) et la décomposition orthogonale régularisée (SOD - Smooth Orthogonal Decomposition).

Dans le cadre de l'étude effectuée au cours de cette thèse, on s'intéresse aux problèmes discrets ou discrétisés en espace pour les besoins de l'analyse. Pour cela, nous serons plutôt intéressés par les méthodes de décomposition discrètes. Examinons de plus près ces méthodes.

(a) **La Décomposition Orthogonale Propre :**

La POD est une procédure linéaire, qui consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux (les POMs) formant une bonne approximation de la base des modes propres du système [41, 42]. Ces POMs sont calculés à partir de la matrice de corrélation trouvée grâce

à la matrice des données mesurées  $\mathbf{X}$  [11, 45]. Au cours des années, la POD est devenue un outil attractif pour les scientifiques et applicable sur des champs variés.

De nos jours, il est démontré que la POD est une technique utile dans le cas des systèmes non-linéaires [46], des systèmes continus échantillonnés discrètement, lorsque la discrétisation est régulièrement espacée [24], et même pour des discrétisations non-uniformes avec des structures homogènes grâce à une version modifiée de la POD [34]. La POD a aussi été testée sur une poutre “cantilever” avec contraintes en 2003 par Feeny et Riaz [70].

De plus, des études ont aussi été menées sur l’application de la POD aux écoulements turbulents [8], aux écoulements dans le domaine aérodynamique [64] et aux réponses dans le domaine fréquentiel pour extraire les modes normaux d’une structure ayant une distribution de masse non-homogène [35]. La POD, est devenue aussi une technique efficace pour la réduction de l’ordre du modèle [2, 44] comme par exemple la réduction d’un modèle physique d’un cuivre pour la synthèse sonore [5] ou aussi des problèmes d’interaction entre un fluide et une structure [53].

(b) **La Décomposition en Valeurs Singulières :**

La SVD est une méthode de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. Cette décomposition permet à une matrice qui n’est pas nécessairement carrée d’être diagonalisée en deux bases orthonormées de vecteurs singuliers [45] (vecteurs singuliers gauches et vecteurs singuliers droits). Il est démontré que les vecteurs singuliers gauches sont égaux aux vecteurs POMs de la POD et que les racines carrées des valeurs singulières sont égales aux valeurs POVs de la POD [39]. De plus, les chercheurs ont trouvé pertinente l’application de la SVD dans différents domaines, tel le domaine des écoulements turbulents [27] vu que chaque vecteur singulier droit de la SVD est égal à l’énergie de chaque mode propre. La SVD, devenant un outil assez efficace (tout comme la POD), a été appliquée pour des systèmes linéaires ainsi que pour des systèmes non linéaires [43].

(c) **La Décomposition Orthogonale Régularisée :**

La SOD est une technique d’analyse des données multidimensionnelles, proposée récemment pour approcher les vecteurs propres des systèmes de vibration à plusieurs d.d.l [13]. Ces vecteurs propres notés les SOMs sont calculés à partir de la matrice de corrélation des déplacements et celle des vitesses [23]. Les SOMs sont liées aux POMs par une relation démontrée dans le chapitre 3. Contrairement à la POD, la SOD ne nécessite par la connaissance a priori de la matrice de masse du système [7, 79]. En plus de la détection d’un endommagement, la SOD a été démontrée aussi efficace pour reconstruire la fatigue locale [72] tant pour le linéaire que pour le non linéaire [73].

Ces trois méthodes de décomposition orthogonale basées sur la corrélation sont devenues très utilisées dans différents domaines et pour différentes applications. Malgré leur efficacité, ces méthodes présentent certaines limitations :

◇ Limites de la POD :

- (a) Les modes propres du système sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse  $\mathbf{M}$  alors que les POMs sont deux à deux orthogonaux. Si la matrice de masse est proportionnelle à la matrice identité, alors les POMs sont bien une approximation des modes propres. Sinon, pour retrouver les modes propres il faut calculer les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}$ .
- (b) Lorsqu’il existe deux fréquences très proches, la POD ne permet plus de distinguer les sous espaces propres de chacune.

- (c) Les POVs, valeurs propres de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}$  ne sont pas liées aux fréquences propres. La POD n'est pas capable de donner des informations sur les valeurs propres du système.
- ◇ Limites de la SVD :
  - (a) Il est démontré que les vecteurs singuliers gauches sont égaux aux POMs qui sont deux à deux orthogonaux. Par conséquent, la SVD possède les deux limites de la POD décrites dans (a) et (b).
  - (b) Les valeurs singulières sont égales à la racine carrée des POVs. Il en résulte que la SVD ne donne pas une approximation des fréquences propres du système.
- ◇ Limitation de la SOD :
 

La SOD ne nécessite pas la connaissance a priori de la matrice de masse  $\mathbf{M}$ , par contre elle utilise la notion de dérivation en temps. La SOD permet d'approcher les modes propres et les fréquences propres du système.

### 1.3 Méthodes de détection et de localisation de la modification

Pour détecter une modification en comparant les fréquences entre deux états stationnaires, il suffit d'utiliser la transformée de Fourier, ou plutôt, sa version numérique : la FFT (Fast Fourier Transform).

Si les réponses vibratoires ont été mesurées en continu et sur une longue période depuis l'état initial jusqu'à l'état modifié, il est plus judicieux d'utiliser la transformée en ondelette (TO). Il est alors possible de voir si la modification a été brutale ou progressive. Dans le premier cas on peut alors déterminer approximativement le moment du changement. Dans le second cas on peut estimer la période transitoire et la rapidité du phénomène en étudiant la variation des fréquences au cours du temps.

Les techniques de traitement du signal temps-fréquences sont assez récentes et ont été appliquées en identification modale à partir des années 90 comme la transformée en ondelettes [60, 62, 82]. Argoul *et al.* [3, 4] proposent une procédure d'identification des fréquences propres, des taux d'amortissement et des déformées modales en utilisant la transformée en ondelettes. Les ondelettes sont des fonctions oscillantes bien localisées en temps et en fréquence. L'idée principale de la transformée en ondelettes permet une approche multi-résolution. En effet, en regardant un signal sur une grande zone nous distinguons des détails grossiers. De façon similaire, des détails de plus en plus petits sont observés en diminuant la taille de la zone d'observation.

Les transformées en ondelettes continues et discrètes ont été utilisées dans l'identification et la caractérisation des processus aléatoires et transitoires concernant les tremblements de terre, le vent et l'océanographie [32].

La littérature montre que la transformée en ondelettes a été aussi utilisée dans le cas continu [50, 63] et le cas complexe [1], et dans plusieurs domaines tels que le domaine de la compression des images [56].

### 1.4 Démarche de la recherche

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude bibliographique sur des outils d'identification des caractéristiques d'un système (POD, SVD et SOD) ainsi que la transformée en ondelettes

utilisée pour localiser en temps la variation de masse subie ; cet outil étant aussi utilisable pour la détermination des paramètres modaux.

Les méthodes d'identification des paramètres modaux (POD, SVD et SOD) présentent des limites dans leur utilisation. Une des études effectuées au cours de cette thèse consiste à préciser les conditions à imposer pour obtenir une certaine précision lors de l'utilisation de la POD ou de la SVD.

Comme discuté dans l'introduction de ce chapitre, il est intéressant de pouvoir suivre l'évolution d'un système. La transformée en ondelettes est un outil efficace dans la localisation en temps de toute variation ; c'est l'outil utilisé dans l'étape 1 de l'évaluation des modifications de masse. Les étapes 2 et 3 consistent respectivement en la localisation en espace de la variation et en la quantification de cette variation. Notre analyse se limitera à l'étude des effets vibratoires suite à une modification de la masse ; nous supposons que la rigidité est toujours constante.

Dans le chapitre 2 nous présentons le problème direct, ainsi que la résolution et le calcul des modes propres et des fréquences propres des systèmes dynamiques.

Ensuite, dans le chapitre 3 nous détaillons chacune des méthodes de décomposition orthogonale pour approcher les modes propres du système et nous cherchons à améliorer les conditions d'utilisation de la POD. Nous proposons une condition suffisante sur le temps d'observation pour obtenir une certaine précision.

Dans le chapitre 4 nous présentons la transformée en ondelettes et nous choisissons l'ondelette de Cauchy. Nous présentons les différentes étapes de calcul numérique ainsi que la recherche des modes propres, des fréquences propres et des coefficients d'amortissement par la transformée en ondelettes.

Le chapitre 5 introduit le système dynamique étudié pour lequel des données numériques simulant des résultats de mesures sont construites. Ces données seront plus tard utilisées afin de tester la pertinence des différentes méthodes développées pour : l'étape 1, la localisation en temps, l'étape 2, la localisation de la masse modifiée et l'étape 3, l'évaluation de la modification de la masse.

Le chapitre 6 utilise la transformée en ondelettes pour localiser en temps une ou plusieurs variations de la masse ; c'est la méthode utilisée pour l'étape 1.

Nous proposons dans le chapitre 7 trois méthodes de localisation en espace des modifications de la masse (étape 2) que nous testons numériquement sur plusieurs cas.

L'objectif du chapitre 8 est de chercher à quantifier la variation de la masse en utilisant la variation des fréquences propres, ce qui constitue l'étape 3 de notre étude.

Enfin, le chapitre 9 a pour but de mettre en œuvre les nouvelles méthodes proposées dans les chapitres précédents, sur un dispositif expérimental existant déjà au laboratoire de l'UR Navier afin de vérifier la fiabilité de ces méthodes.

## Chapitre 2

# Problème direct : système dynamique linéaire discret

---

**L**'OBJECTIF de ce chapitre est de présenter une étude analytique d'un système dynamique linéaire discret. Après avoir construit l'équation de mouvement d'un tel système, nous calculons les modes propres le caractérisant puis nous cherchons à résoudre le système homogène ainsi que le système non homogène.

---



## PLAN DU CHAPITRE 2

---

<b>2.1</b>	<b>Système dynamique linéaire d'ordre 2 à <math>n</math> d.d.l</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>Résolution du système dynamique</b>	<b>12</b>
2.2.1	Modes propres et résolution du système homogène	12
2.2.2	Modes propres et résolution du système non homogène	15
<b>2.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>

---

Pour commencer notre étude sur l'identification des paramètres modaux des systèmes dynamiques linéaires à  $n$  d.d.l, une description de tels systèmes est nécessaire. Cette description consiste à présenter le problème direct : les équations du mouvement ainsi que le calcul des modes propres et la solution du système. En effet, on aura besoin de construire des données numériques à partir des solutions du système. Et ces données seront utilisées pour tester des méthodes d'identification des paramètres modaux. Ce problème indirect sera étudié dans le chapitre suivant.

Dans ce chapitre nous décrivons tout d'abord dans le paragraphe 2.1 l'équation du mouvement d'un système dynamique linéaire discret d'ordre 2. Nous cherchons ensuite à calculer les modes propres et à résoudre le système homogène dans le paragraphe 2.2.1 et le système non homogène dans le paragraphe 2.2.2.

## 2.1 Système dynamique linéaire d'ordre 2 à $n$ d.d.l

Nous nous plaçons dans le cadre d'un comportement linéaire d'une structure mécanique effectuant de petits déplacements autour d'un état d'équilibre. L'équation d'équilibre dynamique d'un système à  $n$  degrés de liberté (d.d.l) peut être obtenue en écrivant, pour chaque d.d.l que la résultante des forces est nulle [68].

Pour chaque d.d.l  $i$ , ces forces sont :

- forces élastiques  $\mathbf{f}_{\mathbf{S}i}(t)$ ,
- forces d'amortissement  $\mathbf{f}_{\mathbf{D}i}(t)$ ,
- forces d'inertie  $\mathbf{f}_{\mathbf{I}i}(t)$ ,
- forces extérieures  $\mathbf{z}_i(t)$ .

L'équilibre général du système, pour chaque d.d.l “ $i$ ” est ainsi donné par :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{S}i}(t) + \mathbf{f}_{\mathbf{D}i}(t) + \mathbf{f}_{\mathbf{I}i}(t) = \mathbf{z}_i(t) \quad (2.1)$$

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients traduisant la dépendance de la force en un point donné sur la valeur du mouvement de tous les autres points. Posons  $\mathbf{x} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  le vecteur de déplacement en fonction du temps ; il est de la forme :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ainsi :

1. La force élastique, dont les composantes sont les  $\mathbf{f}_{\mathbf{S}i}(t)$ , est développée en fonction du déplacement et s'exprime sous la forme matricielle :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{S}} = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2.2)$$

La matrice  $\mathbf{K} = (k_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  est la matrice de rigidité du système. Elle est symétrique, définie et positive. Les  $k_{ij}$  représentent la force engendrée suivant le d.d.l  $i$  par un déplacement unitaire imposé au d.d.l  $j$ .

2. La force d'amortissement, dont les composantes sont les  $\mathbf{f}_{\mathbf{D}i}(t)$ , et dans le cas d'un amortissement visqueux proportionnel à la vitesse, s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{D}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} \quad (2.3)$$

La matrice  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  est la matrice d'amortissement du système. Elle est symétrique. Les coefficients  $c_{ij}$  correspondent à la force engendrée suivant le d.d.l  $i$  par une vitesse unité imposée au d.d.l  $j$ . La dérivée de  $\mathbf{x}$  par rapport au temps est représenté par  $\dot{\mathbf{x}}$ .

3. La force d'inertie, a pour composantes les  $\mathbf{f}_{\mathbf{I}i}(t)$ , et est exprimée de façon similaire :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{I}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} \quad (2.4)$$

La matrice  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  est la matrice de masse du système. Elle est symétrique, définie et positive. Les  $m_{ij}$  correspondent à la force engendrée suivant le d.d.l  $i$  par une accélération unitaire imposé au d.d.l  $j$ . La dérivée seconde de  $\mathbf{x}$  par rapport au temps est représentée par  $\ddot{\mathbf{x}}$ .

En regroupant les équations (2.2), (2.3) et (2.4) dans l'équation (2.1) et en notant  $\mathbf{z}$  le vecteur ayant pour composantes les  $z_i$ , l'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit sous sa forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad (2.5)$$

Les vibrations libres du système sont solution de l'équation homogène associée à (2.5) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

En partant de la matrice de masse  $\mathbf{M}$ , la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  bien connues, nous calculons la matrice des déplacements  $\mathbf{X}$  ayant pour composantes les vecteurs  $\mathbf{x}$ , après avoir calculé les valeurs et vecteurs propres du système et leurs propriétés.

## 2.2 Résolution du système dynamique

Dans ce paragraphe, nous cherchons à résoudre les systèmes homogènes et non homogènes en utilisant la diagonalisation des matrices symétriques pour transformer le système à  $n$  d.d.l en un système à  $n$  équations découplées. Nous ferons cette étude dans le cas d'un amortissement proportionnel.

### 2.2.1 Modes propres et résolution du système homogène

Nous considérons d'abord le système homogène donné par (2.6). Ainsi nous cherchons à résoudre le système amorti libre à  $n$  d.d.l sous sa forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

ayant pour conditions initiales :

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$$

$\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\ddot{\mathbf{x}}$  étant les vecteurs de déplacements, de vitesses et d'accélération respectivement, et les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  étant symétriques et positives. De plus,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont définies. Ainsi, nous posons [29] :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}(t) \quad (2.8)$$

En multipliant par  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  on obtient alors :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

et les conditions initiales deviennent :

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{x}}_0$$

Comme les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont symétriques, définies et positives, la matrice  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  l'est aussi. Or une matrice symétrique est toujours diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres  $\mathbf{p}_i$ .

Soit  $\mathbf{P}$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs orthonormés  $\mathbf{p}_i$ , cette matrice est donc unitaire ( $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ ).

Puisque  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  est définie et positive, ses valeurs propres  $\lambda_i$  sont strictement positives. En posant  $\lambda_i = \omega_i^2$  avec  $\omega_i > 0$  [29], nous obtenons :

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} = \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_i) \quad (2.10)$$

Si  $\mathbf{C}$  est symétrique, alors la matrice  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  est aussi symétrique donc diagonalisable par rapport à une base orthogonale. Si sa diagonalisation se fait dans la même base de vecteurs propres  $\mathbf{p}_i$  que la matrice  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ , on dit que l'amortissement est proportionnel. Comme  $\mathbf{C}$  est positive, les valeurs propres  $\mu_i$  de  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  sont positives ou nulles, et on peut écrire  $\mu_i = 2\omega_i \zeta_i$  avec  $\zeta_i \geq 0$  [29] et alors on a :

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} = \mathbf{P} \text{diag}(\mu_i) \quad (2.11)$$

En posant,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t) \quad (2.12)$$

et en multipliant par  $\mathbf{P}^{-1}$ , le système (2.9) s'écrit en fonction des deux variables  $\mu_i$  et  $\lambda_i$  sous la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\mu_i) \dot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{r}(t) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Ainsi pour tout  $i \in \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ ,

$$\ddot{r}_i(t) + 2\omega_i\zeta_i\dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0 \quad (2.14)$$

Le système ainsi obtenu est donc complètement découplé.

D'où, pour chaque  $r_i(t)$ , l'équation caractéristique est donnée par :

$$s^2 + (2\omega_i\zeta_i)s + \omega_i^2 = 0 \quad (2.15)$$

avec  $\Delta = 4\omega_i^2 (\zeta_i^2 - 1)$ .

Dans le cas d'un amortissement sous-critique, *i.e.*  $\zeta_i < 1$ ,  $\Delta < 0$  et donc l'équation (2.15) admet deux racines complexes de la forme :

$$s = -\omega_i\zeta_i \pm i\omega_i\sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (2.16)$$

En posant  $\tilde{\omega}_i = \omega_i\sqrt{1 - \zeta_i^2}$  [29], la solution générale pour  $r_i(t)$  est donnée par :

$$r_i(t) = e^{-\omega_i\zeta_i t} \left[ r_i(0) \cos(\tilde{\omega}_i t) + \frac{1}{\tilde{\omega}_i} [\dot{r}_i(0) + \omega_i\zeta_i r_i(0)] \sin(\tilde{\omega}_i t) \right] \quad (2.17)$$

Nous pouvons introduire la quantité  $a_i$  telle que :

$$a_i^2 = r_i^2(0) + \frac{\dot{r}_i^2(0)}{\tilde{\omega}_i^2} \left( 1 + \omega_i\zeta_i \frac{r_i(0)}{\dot{r}_i(0)} \right)^2 \quad (2.18)$$

En introduisant l'angle  $\theta_i \in [0, \pi]$  défini par :

$$\tan \theta_i = \frac{-\frac{1}{\tilde{\omega}_i} [\dot{r}_i(0) + \omega_i\zeta_i r_i(0)]}{r_i(0)} \quad (2.19)$$

nous pouvons écrire la solution générale  $r_i(t)$  sous la forme suivante :

$$r_i(t) = e^{-\omega_i\zeta_i t} a_i \cos(\tilde{\omega}_i t - \theta_i) \quad (2.20)$$

Or,

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{r}(t)} \quad (2.21)$$

En introduisant

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \quad (2.22)$$

la solution générale  $\mathbf{x}(t)$  du système initial (2.7) s'écrit en fonction des  $r_i(t)$  et des vecteurs  $\boldsymbol{\varphi}_i$  de la matrice  $\boldsymbol{\phi}$  sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i \quad (2.23)$$

Les  $\varphi_i$  étant les vecteurs colonnes de la matrice  $\phi$ , ils peuvent avoir un rôle dans la caractérisation du système (2.7). En effet, comme  $\varphi_i = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{p}_i$  d'après l'équation (2.22) et comme les  $\mathbf{p}_i$  forment une base orthonormée de vecteurs propres de  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  et de  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  (dans le cas proportionnel), alors pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{p}_i = \omega_i^2 \mathbf{p}_i \iff \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \varphi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \varphi_i \iff \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \varphi_i = \omega_i^2 \varphi_i \quad (2.24)$$

et,

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{p}_i = 2\omega_i \zeta_i \mathbf{p}_i \iff \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \varphi_i = 2\omega_i \zeta_i \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \varphi_i \iff \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \varphi_i = 2\omega_i \zeta_i \varphi_i \quad (2.25)$$

Les  $\varphi_i$  forment ainsi à la fois une base de vecteurs propres de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  et de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$ . Cette base n'est pas orthonormée dans la norme  $L_2$ . Mais comme on a  $\phi = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$  étant la matrice unité ; donc  $\phi^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \phi = \mathbf{I}$ . Ainsi,

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = \mathbf{I} \quad , \quad \phi^T \mathbf{K} \phi = \text{diag}(\omega_i^2) \quad \text{et} \quad \phi^T \mathbf{C} \phi = \text{diag}(2\omega_i \zeta_i)$$

Par conséquent, les  $\varphi_i$  qui forment une base de vecteurs propres de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  et de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$  sont orthonormés par rapport à la matrice de masse  $\mathbf{M}$ .

De plus, comme  $\phi = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}$ , on a aussi :

$$\phi^T = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

Ces deux relations liant les  $\varphi_i$ , que l'on appelle les modes propres du système, à la base orthogonale formée par les  $\mathbf{p}_i$  entraînent la relation suivante qui nous sera utile lors de l'étude des vecteurs propres de la matrice de corrélation dans la section 3.5 du chapitre 3 :

$$\phi^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \phi^T \mathbf{M} \quad (2.27)$$

## 2.2.2 Modes propres et résolution du système non homogène

Cherchons maintenant à résoudre le système non homogène associé :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) \quad (2.28)$$

En suivant toujours la même démarche que celle du paragraphe 2.2.1, on obtient l'équation suivante :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{s}(t) \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P} \mathbf{s}(t)$ .

En notant  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{s}(t) = \mathbf{P}^T \phi \mathbf{P} \mathbf{s}(t)$  ayant pour composantes  $f_i$ , nous récupérons  $n$  équations découplées :

$$\ddot{r}_i(t) + 2\omega_i \zeta_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = f_i(t) \quad (2.30)$$

La solution générale de l'équation (2.30) est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière, notée  $h_i(t)$ , de l'équation différentielle avec second membre.

Dans le cas où  $f_i(t) = \delta(t)$  le dirac en zéro,  $h_i(t)$  est la réponse impulsionnelle et elle vérifie :

$$\ddot{h}_i(t) + 2\omega_i\zeta_i\dot{h}_i(t) + \omega_i^2 h_i(t) = \delta(t) \quad (2.31)$$

En prenant la transformation de Laplace de  $h_i(t)$  notée  $H_i(p)$  on a :

$$(p^2 + 2\omega_i\zeta_i p + \omega_i^2) H_i(p) = 1$$

Alors,

$$H_i(p) = \frac{1}{(p + \omega_i\zeta_i)^2 + \omega_i^2(1 - \zeta_i^2)} \quad (2.32)$$

d'où, en posant  $\tilde{\omega}_i = \omega_i\sqrt{1 - \zeta_i^2}$ ,

$$h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\omega}_i} e^{-\omega_i\zeta_i t} \sin(\tilde{\omega}_i t) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

On en déduit qu'une solution particulière de l'équation (2.30) ayant  $f_i(t)$  pour second membre est :

$$r_i(t) = e^{-\omega_i\zeta_i t} [A_i \cos(\tilde{\omega}_i t) + B_i \sin(\tilde{\omega}_i t)] + f_i * h_i(t) \quad (2.34)$$

où  $A_i = r_i(0)$  et  $B_i = \frac{1}{\tilde{\omega}_i} [\dot{r}_i(0) + \omega_i\zeta_i r_i(0)]$ .

Cherchons maintenant le vecteur des déplacements  $\mathbf{x}$  à partir de la solution  $\mathbf{r}$  d'après l'équation (2.21) :

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i \quad (2.35)$$

Avec,

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{r}(0)$$

et

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\phi} \dot{\mathbf{r}}(0)$$

où,  $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n]$  et  $\boldsymbol{\varphi}_i$  sont les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ , orthogonaux et normés par rapport à  $\mathbf{M}$ .

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord rappelé l'équation du mouvement des systèmes dynamiques linéaires avec ou sans force extérieure. Ensuite, la recherche des valeurs propres et des modes propres de ces systèmes a été présentée. L'originalité de cette démarche est d'avoir effectué un changement de base permettant de travailler avec des matrices symétriques et donc diagonalisables dans une base orthogonale. Enfin, nous avons calculé la solution des systèmes homogènes ainsi que celle des systèmes non homogènes. La solution générale est trouvée en fonction des modes propres de ces systèmes.

En pratique, nous ne connaissons pas les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  caractérisant le système dynamique. Nous ne disposons que des mesures obtenues grâce à des capteurs de déplacement, de vitesse ou d'accélération. La matrice de réponses vibratoires du système est composée de ces mesures. Par conséquent, l'identification des caractéristiques d'un système dynamique repose sur la recherche des modes propres de celui-ci. Des méthodes basées sur la matrice de corrélation de la matrice des mesures et permettant d'approcher les modes propres du système seront présentées et étudiées dans le chapitre [3](#).





## Chapitre 3

# Méthodes de décomposition orthogonale basées sur la corrélation

---

DANS CE CHAPITRE, nous décrivons trois méthodes de décomposition orthogonale basées sur la corrélation : la POD, la SVD et la SOD. Nous présentons ainsi les liens entre elles ainsi que les différents problèmes et contraintes rencontrés lors de leur utilisation pour déterminer les paramètres modaux. Enfin, nous présentons des conditions permettant de s'assurer de la précision des résultats obtenus grâce à la POD.

---

## PLAN DU CHAPITRE 3

---

<b>3.1</b>	<b>Décomposition Orthogonale Propre (POD)</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)</b>	<b>22</b>
<b>3.3</b>	<b>Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD)</b>	<b>24</b>
<b>3.4</b>	<b>Comparaison et analyse critique de ces méthodes</b>	<b>25</b>
<b>3.5</b>	<b>Comment trouver les modes propres avec une précision fixée</b>	<b>26</b>
3.5.1	Choix de la fréquence d'échantillonnage	27
3.5.2	Choix du temps d'observation total $T$	28
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

---

Que ce soit dans le domaine des écoulements turbulents, des activités sismiques, de la météo, des systèmes en vibrations, etc., les méthodes de décomposition orthogonale s'avèrent indispensables au niveau de l'analyse des données mesurées. Notre but dans ce chapitre est de reconstruire les caractéristiques modales d'un système différentiel linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, ne connaissant que la matrice des réponses  $\mathbf{X}$ . Dans cet objectif, nous décrivons trois techniques d'analyse de données qui permettent d'approcher ces caractéristiques.

La méthode de Décomposition Orthogonale Propre (Proper Orthogonal Decomposition - POD) présentée dans le paragraphe 3.1 est une procédure linéaire, qui consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux (Proper Orthogonal Modes - POMs) formant une bonne approximation de la base des modes propres du système [6, 39, 40, 41, 42, 70, 80].

La deuxième méthode, la Décomposition en Valeurs Singulières (Singular Value Decomposition - SVD) décrite dans le paragraphe 3.2 est une méthode de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. Cette décomposition, est une généralisation du théorème spectral [48] et permet à une matrice qui n'est pas nécessairement carrée d'être diagonalisée par rapport à deux bases orthonormées de vecteurs singuliers [17, 27, 43, 52, 64].

La troisième méthode, la Décomposition Orthogonale Régularisée (Smooth Orthogonal Decomposition - SOD) introduite dans le paragraphe 3.3 est une technique d'analyse des données proposée récemment pour approcher les vecteurs propres des systèmes de vibration à plusieurs d.d.l [7, 13, 23, 72, 73, 79]. Cet outil permet d'obtenir les valeurs propres du système et ne nécessite pas la connaissance de la matrice de masse.

Chacune de ces méthodes s'appliquent à des données discrètes mais ceci ne veut pas dire que ces méthodes ne sont pas utilisables dans le cas continu. En effet, les systèmes continus sont le plus souvent étudiés à partir des données numériques discrétisées, d'où l'utilisation des méthodes portant sur des données discrètes. Ainsi, ces méthodes sont aussi applicables sur des structures physiques continues : poutres, câbles, etc. Dans ce cas la matrice des données  $\mathbf{X}$ , est formée de  $n$  vecteurs lignes  $\mathbf{x}$  représentant les mesures issues des différents capteurs positionnés en différents points de la structure. Dans ce qui suit, ces mesures sont échantillonnées en temps. La matrice  $\mathbf{X}$  est de dimension  $n \times m$  et est formée comme suit :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & \dots & x_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t_1) & \dots & x_n(t_m) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dans le cas d'un système discret,  $n$  représente le nombre de degré de liberté.

Examinons de plus près chacune de ces méthodes présentées dans la littérature et discutons leur efficacité.

### 3.1 Décomposition Orthogonale Propre (POD)

La POD consiste à essayer de retrouver les modes propres du système différentiel initial à partir des modes propres d'une matrice  $\mathbf{R}$  appelée matrice de corrélation. Celle-ci est définie à partir de la matrice des réponses  $\mathbf{X}$  par :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \quad (3.2)$$

avec  $m$  qui représente le nombre d'échantillons en temps.

Les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R}$  sont appelés les modes propres orthogonaux (proper orthogonal modes - POM). Ils approchent les modes propres linéaires (linear normal mode - LNM) du système différentiel lorsque la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est proportionnelle à la matrice identité. Les valeurs propres de  $\mathbf{R}$  sont appelées les valeurs propres orthogonales (proper orthogonal value - POV) et dépendent des énergies portées par chaque mode [8, 64].

Dans le cas où la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est proportionnelle à la matrice identité, de nombreux travaux [11, 25, 43] ont permis de vérifier numériquement que les POMs sont une bonne approximation des LNM du système [24].

Par ailleurs, il est montré que les POMs approchent les LNM des systèmes linéaires discrets symétriques non amortis [45] ainsi que ceux des systèmes légèrement amortis [26]. Cette méthode a été étendue au cas des systèmes non-linéaires [28, 46].

Toutefois, l'application de la POD exige certaines précautions. Lorsque la matrice de masse  $\mathbf{M}$  n'est pas proportionnelle à la matrice identité, les POMs récupérés n'approchent pas directement les LNM. En effet, les LNM sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse  $\mathbf{M}$  (2.22) alors que les POMs sont deux à deux orthogonaux puisque  $\mathbf{R}$  est une matrice réelle symétrique et de dimension  $n \times n$ . Dans le cas où la matrice de masse est diagonale il est vérifié dans [25] que les modes propres du système sont approchés par les modes propres de  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}$ . Cette propriété peut être étendue à toute matrice de masse symétrique, définie et positive comme on le verra dans la section 3.5. Par conséquent, la matrice de masse  $\mathbf{M}$  doit être soit connue a priori soit proportionnelle à la matrice identité. Ces deux contraintes de la POD ne sont pas les seules.

Un deuxième problème apparaît lorsqu'il existe deux pulsations très proches ou une pulsation double ; la POD ne peut pas faire la distinction entre elles. Dans ce cas, Feeny et Han [35], montrent qu'un seul POM converge vers son LNM approprié. Cependant, il est possible de retirer les autres POMs.

Une troisième limitation de la POD est que les valeurs propres POVs ne sont pas les fréquences propres du système mais les énergies portées par chaque mode selon l'excitation du système.

Ces différentes limitations de la POD nous ont incités à chercher dans la littérature d'autres méthodes de décomposition, pouvant éventuellement surmonter ces limitations : la SVD et la SOD.

## 3.2 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

La SVD permet de retrouver les POMs et les POVs d'une manière différente. En effet, pour toute matrice réelle  $\mathbf{X}$  de dimension  $n \times m$  existe une factorisation réelle nommée la SVD qui est de la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (3.3)$$

avec,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  deux matrices orthonormales :

$\mathbf{U}$  de dimension  $n \times n$  ( $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ ) et

$\mathbf{V}$  de dimension  $m \times m$  ( $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ ) ; et

$\mathbf{\Sigma}$  de dimension  $n \times m$ , est une matrice pseudo-diagonale définie et positive, composée des valeurs singulières  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$  avec  $r = \min(m, n)$  [17, 27, 52, 64].

Les  $r$  premiers vecteurs colonnes de  $\mathbf{U}$  sont les vecteurs singuliers gauches de  $\mathbf{X}$ , alors que les  $r$  premiers vecteurs de  $\mathbf{V}$  sont les vecteurs singuliers droits de  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{U}^T \mathbf{X} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (3.4)$$

Comparons les valeurs singulières et les vecteurs singuliers de cette matrice rectangulaire  $\mathbf{X}$ , aux valeurs propres et vecteurs propres de la matrice carrée  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ .

D'après la Décomposition en Valeurs Singulières (3.3) on a :

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^T \quad (3.5)$$

La matrice  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres ayant pour décomposition :

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{P}}^T \quad (3.6)$$

avec,

$\tilde{\mathbf{P}}$  la matrice orthogonale de dimension  $n \times n$  dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  et

$\tilde{\mathbf{D}}$  la matrice diagonale de dimension  $n \times n$  dont les composantes sont les valeurs propres de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ .

Par comparaison, les valeurs singulières  $\sigma_i$  de  $\mathbf{X}$  sont les racines carrées des valeurs propres  $\mu_i$  de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  :

$$\sigma_i = \sqrt{\mu_i} \quad (3.7)$$

Dans le cas de valeurs propres multiples (par exemple si  $\mu_i = \mu_j$ ), alors le sous-espace propre de dimension 2 engendré par  $u_i$  et  $u_j$  est identique à celui engendré par  $p_i$  et  $p_j$ . De plus, les vecteurs singuliers gauches  $u_i$  de  $\mathbf{X}$  sont les vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ .

Ici, il est utile de rappeler que la matrice de corrélation est  $\mathbf{R} = \frac{1}{m}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ . Ceci nous permet de déduire que les POMs, étant les vecteurs propres de  $\mathbf{R}$ , sont égaux aux vecteurs singuliers gauches de  $\mathbf{X}$ , et les POVs, étant les valeurs propres de  $\mathbf{R}$ , sont égales au carré des valeurs singulières de  $\mathbf{X}$  divisées par  $m$ . Ceci montre l'existence de relations entre la SVD et la POD.

Ces liens avec la POD nous permettent de déduire que la SVD possède les mêmes limitations que la POD. En fait, la SVD a déjà été utilisée par Feeny et Kappagantu [45] et par Kerschen [43] dans le cas où la matrice de masse est proportionnelle à la matrice identité ; dans les autres cas, la connaissance de  $\mathbf{M}$  reste a priori une nécessité. De plus, des problèmes existent toujours lorsque deux fréquences de la réponse sont proches [35, 45].

En nous inspirant de l'étude effectuée dans le chapitre 3 de la thèse de Kerschen [43], nous cherchons à réécrire la matrice de réponse  $\mathbf{X}$  d'une forme représentant une décomposition SVD. Nous cherchons à vérifier cet outil pour  $\mathbf{M}$  non proportionnelle à la matrice identité ainsi que lorsque deux pulsations sont très proches dans l'annexe A.

Nous décrivons dans le paragraphe suivant une troisième méthode de décomposition orthogonale : la Décomposition Orthogonale Régularisée.

### 3.3 Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD)

Contrairement à la POD et la SVD, la SOD ne nécessite pas la connaissance a priori de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et peut identifier d'une manière unique les sous-espaces modaux ayant les mêmes POVs [13, 23].

Au départ on ne connaît que la matrice des déplacements  $\mathbf{X}$ , qui est échantillonnée  $m$  fois avec un pas d'échantillonnage  $\Delta t$ . Connaissant la matrice des déplacements, on construit alors la matrice de vitesse  $\mathbf{V}$  de dimension  $n \times (m - 1)$ .

Soient  $\mathbf{R}_x$  et  $\mathbf{R}_v$  respectivement la matrice de covariance des déplacements et la matrice de covariance des vitesses. Elles sont de dimension  $n \times n$  et sont données par :

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \quad (3.8)$$

et

$$\mathbf{R}_v = \frac{1}{m-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \quad (3.9)$$

Enfin, la SOD consiste à résoudre le problème de vecteurs propres suivant :

$$\mathbf{R}_x \psi_i = \sigma_i \mathbf{R}_v \psi_i \quad \text{pour } i = \{1, \dots, n\} \quad (3.10)$$

avec,  $\psi_i$  les modes régularisés orthogonaux (Smooth Orthogonal Mode - SOM) et  $\sigma_i$  les valeurs régularisées orthogonales (Smooth Orthogonal Value - SOV) qui sont respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{R}_v^{-1} \times \mathbf{R}_x$  [23].

Il est utile de noter que la SOD est applicable avec des données de déplacement et de vitesse ainsi qu'avec des données de vitesse et d'accélération.

Dans la suite, nous allons vérifier que les SOMs approchent les modes propres du système dynamique (3.11). Pour cela, on s'intéresse à trouver les relations existant entre les SOMs et les SOVs d'une part et les modes propres et les valeurs propres du système d'autre part.

Soit tout d'abord, pour des raisons de simplification, le système dynamique libre non amorti suivant :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Comme il a déjà été démontré dans le paragraphe 2.2.2, les  $\varphi_i$  sont les modes propres du système (3.11) et les  $\lambda_i$  les valeurs propres associées tels que :

$$\mathbf{K} \varphi_i = \lambda_i \mathbf{M} \varphi_i \quad \text{pour } i = \{1, \dots, n\} \quad (3.12)$$

La forme matricielle de l'équation (3.12) est donnée par :

$$\mathbf{K} \phi = \mathbf{M} \phi \Lambda \quad (3.13)$$

avec  $\phi$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont les modes propres  $\varphi_i$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale dont les composantes sont les valeurs propres  $\lambda_i$ .

Il serait utile de noter que :

$$\ddot{\mathbf{X}}^T = -\mathbf{X}^T \mathbf{K}^T \mathbf{M}^{-T} \quad (3.14)$$

Cette équation découle du système (3.11).

Cherchons maintenant le lien entre la matrice des SOMs et la matrice  $\phi$ . Considérons la forme matricielle de l'équation (3.10) :

$$\mathbf{R}_x \chi = \mathbf{R}_v \chi \Omega \quad (3.15)$$

avec  $\chi$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont les SOMs  $\psi_i$  et  $\Omega$  la matrice diagonale dont les composantes sont les SOVs  $\sigma_i$ . Ainsi,  $\chi$  et  $\Omega$  constituent la solution du problème à valeurs propres généralisé de  $\mathbf{R}_x$  et de  $\mathbf{R}_v$ .

En utilisant les équations (3.8) et (3.9) dans l'équation (3.15) on obtient :

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T \chi = \mathbf{V} \mathbf{V}^T \chi \Omega \quad (3.16)$$

Les équations  $-\mathbf{X} \ddot{\mathbf{X}}^T = \mathbf{V} \mathbf{V}^T$  [13, 23] et (3.14) nous donnent :

$$\chi = \mathbf{K}^T \mathbf{M}^{-T} \chi \Omega \quad (3.17)$$

Enfin, l'inverse de la transposée de l'équation (3.17) donne :

$$\mathbf{K} \chi^{-T} = \mathbf{M} \chi^{-T} \Omega \quad (3.18)$$

Vu que les équations (3.13) et (3.18) sont des décompositions à valeurs propres généralisées de deux matrices et puisque la solution de telle décomposition est unique, nous déduisons que :

$$\chi^{-T} = \phi \quad (3.19)$$

Ainsi, l'inverse de la transposée des SOMs approche les modes propres du système dynamique libre. De plus, les POVs approchent les valeurs propres du système.

Pour conclure, il est remarquable que la SOD ne nécessite pas la connaissance a priori de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  pour approcher les modes propres et les valeurs propres du système dynamique libre.

### 3.4 Comparaison et analyse critique de ces méthodes

Il a été démontré dans le paragraphe 3.2 que les modes propres et les valeurs propres calculés par la SVD sont égaux à ceux de la POD. Ainsi, les différentes limitations de la POD sont aussi celles de la SVD.

Nous rappelons que les valeurs propres de ces deux méthodes n'approchent pas les valeurs propres du système. De plus, lorsqu'il existe deux pulsations proches, ces deux méthodes ne peuvent pas distinguer entre elles. En outre, pour pouvoir approcher les modes propres par les vecteurs



propres de la matrice  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}$ , la connaissance a priori de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est une nécessité quand elle n'est pas proportionnelle à la matrice identité.

Pour pouvoir conclure que les POM de la POD convergent bien vers les modes propres du système deux conditions sont imposées, soit que le nombre d'échantillons  $m$  tende vers l'infini [26], ou soit que le temps d'observation  $T$  tende vers l'infini [43], ce qui est équivalent pour un pas de temps  $\Delta t$  constant puisque  $T = m \times \Delta t$ .

Mais l'infini n'étant pas accessible, nous nous posons la question suivante : *quelles sont les valeurs minimales à partir desquelles, l'application de la POD sera efficace ?*

Nous nous proposons d'étudier dans le paragraphe suivant, les conditions suffisantes pour que l'approximation des modes propres par les POM ait une certaine précision [20]. En effet, en pratique on ne peut pas avoir un temps d'observation infini et souvent la fréquence d'échantillonnage est fixée par les instruments de mesure. Il faut donc vérifier que ces quantités ont des valeurs convenables pour avoir une estimation correcte.

### 3.5 Comment trouver les modes propres avec une précision fixée

En pratique, les matrices initiales du système dynamique sont inconnues, et les données expérimentales ou numériques, sont discrétisées en temps. La POD consiste à essayer de retrouver les modes propres du système différentiel initial à partir des modes propres d'une matrice  $\mathbf{R}$  appelée matrice de corrélation.

Pour  $n$  vecteurs colonnes  $\mathbf{x}$  échantillonnés  $m$  fois en temps, la matrice des données  $\mathbf{X}$ , de dimension  $n \times m$  est formée comme suit :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & \dots & x_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t_1) & \dots & x_n(t_m) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

La matrice de corrélation est définie par :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$$

Comme on l'a vu dans l'équation (2.23),

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i$$

donc, à l'instant  $t_k$  pour  $k = \{1, \dots, m\}$  on a :

$$\mathbf{x}(t_k) = \sum_{i=1}^n r_i(t_k) \boldsymbol{\varphi}_i$$

Alors, la nouvelle forme matricielle de  $\mathbf{X}$  est :

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\phi} \begin{pmatrix} r_1(t_1) & \dots & r_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(t_1) & \dots & r_n(t_m) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

et celle de  $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$  est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T &= \frac{1}{m} \phi \begin{pmatrix} r_1(t_1) & \dots & r_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(t_1) & \dots & r_n(t_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t_1) & \dots & r_n(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(t_m) & \dots & r_n(t_m) \end{pmatrix} \phi^T \\ &= \phi [r_{ij}] \phi^T \end{aligned} \quad (3.22)$$

où pour  $1 \leq i, j \leq n$ , le terme général  $r_{ij}$  issu du produit scalaire de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne est de la forme :

$$r_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_i(t_k) r_j(t_k) \quad (3.23)$$

Dans le cas où la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est proportionnelle à la matrice identité, de nombreux travaux ont permis de vérifier numériquement que les vecteurs propres de  $\frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$  sont une bonne approximation des modes propres du système.

Nous allons exhiber des conditions suffisantes pour que cela soit le cas même lorsque la matrice  $\mathbf{M}$  n'est pas proportionnelle à la matrice identité (et même pas diagonale). Ces conditions concernent d'une part la fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{\Delta t}$  des données expérimentales et d'autre part le temps total d'observation  $T = m \Delta t$ . On retrouve bien la condition  $m \rightarrow +\infty$ , mais cette condition est clairement insuffisante. On montre aussi que si deux fréquences propres du système sont proches, alors cela amène à augmenter le temps total d'observation pour pouvoir distinguer les deux modes propres correspondants.

La démonstration est faite d'abord dans le cas sans amortissement, puis elle est généralisée au cas avec amortissement proportionnel.

### 3.5.1 Choix de la fréquence d'échantillonnage

On sait que pour toute fonction  $g$  continue sur un intervalle  $[0, T]$ , sa valeur moyenne est la limite de la moyenne des valeurs prises en  $t_k$  [15], avec  $t_k = k\Delta t$  et  $m\Delta t = T$ , pour  $m \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{1}{m\Delta t} \left[ \sum_{k=1}^m g(t_k) \right] \Delta t \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \quad \text{avec} \quad m\Delta t = T \quad (3.24)$$

Pour que  $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g(t_k)$  puisse être approchée raisonnablement par la valeur moyenne de  $g$  sur  $[0, T]$  il faut que la condition de Shannon-Nyquist [15] soit vérifiée, c'est à dire que la fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{\Delta t}$  soit supérieure à au moins 2 fois la fréquence maximale du signal  $g$ .

Pour le système dynamique discret (3.11) les fréquences sont  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  et il faut donc choisir  $\Delta t$  de sorte que :

$$\frac{1}{\Delta t} > \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (\omega_i)}{\pi} \quad (3.25)$$

Alors pour  $T = m\Delta t$  où  $T$  est le temps d'observation et  $m$  est le nombre d'échantillons, on a l'approximation suivante :

$$r_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_i(t_k) r_j(t_k) \approx \tilde{r}_{ij} = \frac{1}{T} \int_0^T r_i(t) r_j(t) dt \quad (3.26)$$

### 3.5.2 Choix du temps d'observation total $T$

Dans ce paragraphe, on étudie la limite de la matrice  $[\tilde{r}_{ij}]$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$  tout d'abord pour le cas sans amortissement dans le paragraphe 3.5.2.1 puis pour le cas avec amortissement proportionnel dans le paragraphe 3.5.2.2.

Tout au long de ce paragraphe nous supposons que  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

#### 3.5.2.1 Cas sans amortissement

En utilisant l'expression (2.20) on déduit l'expression de l'évolution temporelle de chaque mode dans le cas sans amortissement :

$$r_i(t) = a_i \cos(\omega_i t - \theta_i) \quad (3.27)$$

Il s'agit de montrer que, sous certaines conditions, la matrice  $[\tilde{r}_{ij}]$ , tend vers **diag**  $\left(\frac{a_i^2}{2}\right)$ , lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , avec

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{1}{T} \int_0^T r_i(t) r_j(t) dt.$$

Plus précisément pour des  $a_i$  et  $a_j$  non nuls, on va donner les conditions pour que :

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit.

• Pour  $i = j$  : cherchons les conditions suffisantes pour que

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.28)$$

On a :

$$\tilde{r}_{ii} = \frac{1}{T} \int_0^T a_i^2 \cos^2(\omega_i t - \theta_i) dt \quad (3.29)$$

Or,  $\cos^2(\omega_i t - \theta_i) = \frac{1 + \cos(2(\omega_i t - \theta_i))}{2}$ , ainsi :

$$\int_0^T \cos^2(\omega_i t - \theta_i) dt = \frac{T}{2} + \frac{-\sin(2(\omega_i T - \theta_i)) + \sin(2(-\theta_i))}{4\omega_i} \leq \frac{T}{2} + \frac{2}{4\omega_i} \quad (3.30)$$

On a donc :

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{2}{4\omega_i T} \quad (3.31)$$

Pour avoir (3.28) pour un  $\varepsilon$  fixé à l'avance, il suffit que :

$$\frac{1}{2\omega_i T} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

c'est à dire que  $T$  soit tel que :

$$T \geq \frac{1}{\omega_i \varepsilon}$$

Comme  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ , cette condition s'écrit de la forme :

$$T \geq \frac{T_i}{2\pi\varepsilon} \quad (3.32)$$

Comme cette condition doit être vérifiée pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il suffit que  $T$  soit tel que :

$$T \geq \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (T_i)}{2\pi\varepsilon} \quad (3.33)$$

•Pour  $i \neq j$  : cherchons les conditions suffisantes pour que

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.34)$$

On a :

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{a_i a_j}{T} \int_0^T \cos(\omega_i t - \theta_i) \cos(\omega_j t - \theta_j) dt$$

Par souci de simplicité, on fait l'hypothèse que les déphasages sont nuls. On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{ij} &= \frac{a_i a_j}{2T} \int_0^T [\cos((\omega_i + \omega_j)t) + \cos((\omega_i - \omega_j)t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_i + \omega_j} \sin((\omega_i + \omega_j)T) + \frac{1}{\omega_i - \omega_j} \sin((\omega_i - \omega_j)T) \right] \end{aligned}$$

Donc,

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{1}{2T} \left( \frac{1}{\omega_i + \omega_j} + \frac{1}{|\omega_i - \omega_j|} \right) \quad (3.35)$$

Pour avoir (3.34), avec  $\varepsilon$  fixé à l'avance, il suffit que :

$$\frac{1}{2T(\omega_i + \omega_j)} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.36)$$

et

$$\frac{1}{2T|\omega_i - \omega_j|} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.37)$$

Pour que (3.37) soit vérifiée, il suffit que :

$$T \geq \frac{2}{\varepsilon|\omega_i - \omega_j|} \quad (3.38)$$

Ainsi, il suffit donc de choisir

$$T \geq \frac{2}{\varepsilon \min_{1 \leq i < j \leq n} |\omega_i - \omega_j|}$$

S'il existe  $\omega_i$  et  $\omega_j$  proches, il faut compenser ceci en augmentant  $T$ . Lorsque cette condition sur  $T$  est vérifiée, l'inéquation (3.37) est ainsi vraie. Par conséquent, l'inéquation (3.36) est aussi vraie. En effet, comme  $\omega_i \geq 0$  et  $\omega_j \geq 0$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|\omega_i - \omega_j| \leq \omega_i + \omega_j$  et donc

$$\frac{1}{2T(\omega_i + \omega_j)} \leq \frac{1}{2T|\omega_i - \omega_j|} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

• **Pour conclure**, dans le cas non amorti et pour que les coefficients de la matrice  $[\tilde{r}_{ij}]$  soient égaux à  $\frac{\varepsilon}{2}$  près en valeur relative à ceux de la matrice diagonale **diag** $\left(\frac{a_i^2}{2}\right)$ , il suffit que :

$$T \geq T_{\max} = \max \left( \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (T_i)}{2\pi\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon \min_{1 \leq i < j \leq n} |\omega_i - \omega_j|} \right) \quad (3.39)$$

### 3.5.2.2 Cas avec amortissement proportionnel

Dans ce cas l'expression de  $r_i(t)$  est donnée par (2.20) et donc,

$$r_i(t) = a_i e^{-\omega_i \zeta_i t} \cos(\tilde{\omega}_i t - \theta_i) \quad (3.40)$$

Encore une fois, simplement pour faciliter la présentation, on suppose que tous les déphasages sont nuls.

Toujours suivant le même principe, le but est de montrer que, sous certaines conditions, la matrice  $[\tilde{r}_{ij}]$ , tend vers **diag** $\left(\frac{a_i^2}{2}\right)$ , lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Plus précisément pour des  $a_i$  et  $a_j$  non nuls, on va donner les conditions pour que  $\left| \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit.

- Pour  $i = j$  : on a :

$$\tilde{r}_{ii} = \frac{a_i^2}{T} \int_0^T e^{-2\tilde{\omega}_i \zeta_i t} \cos^2(\tilde{\omega}_i t) dt \quad (3.41)$$

Comme le développement en série de  $e^{-x}$  est une série alternée, on a l'encadrement suivant :

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1$$

pour  $x \geq 0$ , donc pour  $0 \leq t \leq T$ , on a :

$$1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i T \leq 1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i t \leq e^{-2\tilde{\omega}_i \zeta_i t} \leq 1 \quad (3.42)$$

Les fonctions  $e^{-2\tilde{\omega}_i \zeta_i t}$  et  $\cos^2(\tilde{\omega}_i t)$  étant positives, on a l'encadrement suivant :

$$(1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i T) \int_0^T \cos^2(\tilde{\omega}_i t) dt \leq \int_0^T e^{-2\tilde{\omega}_i \zeta_i t} \cos^2(\tilde{\omega}_i t) dt \leq \int_0^T \cos^2(\tilde{\omega}_i t) dt$$

d'où,

$$(1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i T) \left( \frac{1}{2} + \frac{-\sin(2\tilde{\omega}_i T)}{4\tilde{\omega}_i T} \right) \leq \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{-\sin(2\tilde{\omega}_i T)}{4\tilde{\omega}_i T}$$

On en déduit l'encadrement de  $\frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2}$  :

$$-\tilde{\omega}_i \zeta_i T - (1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i T) \frac{\sin(2\tilde{\omega}_i T)}{4\tilde{\omega}_i T} \leq \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4\tilde{\omega}_i T}$$

Si,

$$\frac{1}{4\tilde{\omega}_i T} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_i \zeta_i T \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.43)$$

alors

$$\left| (1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i T) \frac{\sin(2\tilde{\omega}_i T)}{4\tilde{\omega}_i T} \right| \leq \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$\left| \tilde{\omega}_i \zeta_i T + (1 - 2\tilde{\omega}_i \zeta_i T) \frac{\sin(2\tilde{\omega}_i T)}{4\tilde{\omega}_i T} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

alors on a bien

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ii}}{a_i^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.44)$$

Mais pour que (3.43) soit possible, il suffit que  $T$  vérifie pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \tilde{\omega}_i T \leq \frac{\varepsilon}{4\zeta_i} \quad (3.45)$$

Ceci impose que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on ait  $4\zeta_i \leq \varepsilon^2$ . En notant  $\eta = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (\zeta_i)$ , il faut donc que  $4\eta \leq \varepsilon^2$ . Ainsi, l'amortissement doit être d'autant plus faible que l'on souhaite une bonne approximation.

Si on suppose que  $4\eta \leq \varepsilon^2$ , alors pour avoir (3.44) il suffit que les conditions de l'équation (3.43) soient vérifiées. En posant  $\tilde{\omega}_i = \frac{2\pi}{\tilde{T}_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et en supposant que  $4\eta \leq \varepsilon^2$ , il suffit que :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (\tilde{T}_i)}{2\pi} \leq T \leq \frac{\varepsilon}{4\eta} \frac{\min_{1 \leq i \leq n} (\tilde{T}_i)}{2\pi} \quad (3.46)$$

- Pour  $i \neq j$  : Cherchons les conditions suffisantes pour que  $\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  :

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{a_i a_j}{T} \int_0^T e^{(-\omega_i \zeta_i - \omega_j \zeta_j)t} \cos(\tilde{\omega}_i t - \theta_i) \cos(\tilde{\omega}_j t - \theta_j) dt$$

Ici la fonction  $g(t) = \cos(\tilde{\omega}_i t - \theta_i) \cos(\tilde{\omega}_j t - \theta_j)$  est continue mais de signe quelconque et  $f(t) = e^{(-\omega_i \zeta_i - \omega_j \zeta_j)t}$  est positive décroissante, il est donc possible d'utiliser le second théorème de la moyenne [22] sur  $[a, b]$  :

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \text{tel que} \quad \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt$$

Or comme précédemment, on a :

$$\left| \int_0^c \cos(\omega_i t - \theta_i) \cos(\omega_j t - \theta_j) dt \right| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_i + \omega_j} + \frac{1}{|\omega_i - \omega_j|} \right)$$

On a alors,

$$\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{e^0}{2T} \left( \frac{1}{\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j} + \frac{1}{|\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_j|} \right)$$

Pour avoir  $\left| \frac{\tilde{r}_{ij}}{a_i a_j} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , avec  $\varepsilon$  fixé à l'avance, il suffit de suivre la même procédure que dans le cas sans amortissement et de choisir :

$$T \geq \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (\tilde{T}_i)}{2\pi\varepsilon} \quad \text{et} \quad T \geq \frac{2}{\varepsilon \min_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_j|} \quad (3.47)$$

Pour conclure, dans le cas non amorti, lorsque les conditions (3.25) sur l'échantillonnage et (3.39) sur le temps d'observation sont vérifiées, la matrice  $[r_{ij}]$  se comporte comme  $[\tilde{r}_{ij}]$  qui peut être approchée par  $\mathbf{diag}(\sigma_i^2)$  avec  $\sigma_i^2 = \frac{a_i^2}{2}$ , l' "énergie" du  $i^{\text{ème}}$  mode, on a alors :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \simeq \phi [r_{ij}] \phi^T \simeq \phi [\tilde{r}_{ij}] \phi^T \simeq \phi \mathbf{diag}(\sigma_i^2) \phi^T \quad (3.48)$$

sont les  $\mathbf{p}_i$  du système initial. Comme on a  $\phi^{-1} = \phi^T \mathbf{M}$  d'après la relation (2.27), on en déduit que :

$$\mathbf{R} \mathbf{M} \simeq \phi \mathbf{diag}(\sigma_i^2) \phi^{-1} \quad (3.49)$$

Donc les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R} \mathbf{M}$  sont une approximation des modes propres  $\varphi_i$  du système initial (c'est à dire les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  et de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$ ). Ces résultats sont valables pour toute matrice  $\mathbf{M}$  symétrique, définie et positive.

Dans le cas amorti, si l'amortissement est assez faible par rapport à la précision  $\varepsilon$  escomptée ( $4\zeta_i \leq \varepsilon^2$ ), alors il suffit que les conditions (3.25), (3.46) et (3.47) soient vérifiées pour obtenir le même résultat.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté trois techniques de décomposition orthogonale basée sur la corrélation : la POD, la SVD et la SOD et nous avons trouvé les liens entre elles. Ensuite, différentes limites de la POD sont discutées. En effet, la connaissance de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est une nécessité lorsque celle-ci n'est pas proportionnelle à la matrice identité. Dans ce cas les modes propres du système sont approchés par les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R} \mathbf{M}$  à condition que la matrice de masse soit définie, positive et symétrique. De plus, lorsque deux fréquences propres du système sont proches, les POMs de la POD n'approchent pas les deux modes propres correspondants. La SVD a les mêmes défauts que la POD car les vecteurs singuliers gauches de  $\mathbf{X}$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{R}$ . Et ni l'une ni l'autre ne permettent d'obtenir une approximation des valeurs propres du système étudié. La SOD permet de se passer de la connaissance de la matrice de masse et donne une approximation des valeurs propres.

L'étude sur la précision de l'approximation, fait apparaître que pour un pas d'échantillonnage fixé, si le temps global d'observation est suffisamment grand par rapport au maximum des différentes périodes et également suffisamment grand dans le cas de fréquences proches alors l'approximation des modes peut être satisfaisante.

Dans la suite de cette étude, nous supposons que le système est non-stationnaire (quasi-stationnaire). Pour suivre l'évolution en temps de ce système nous introduisons dans le chapitre suivant la transformée en ondelettes.





## Chapitre 4

# Transformée en ondelettes continue

---

**A**FIN de déterminer l'instant où une modification de paramètres mécaniques est introduite dans notre système, nous présentons dans ce chapitre une technique d'analyse temps-fréquence : la transformée en ondelettes continue. Parmi plusieurs types d'ondelettes mères, nous choisissons l'ondelette mère de Cauchy ou de Paul. Appliquée à des réponses libres de systèmes non-stationnaires, cette technique va nous permettre d'obtenir les fréquences instantanées contenues dans le signal ainsi que l'évolution temporelle des taux d'amortissement modaux.

---

---

 PLAN DU CHAPITRE 4
 

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>4.2</b>	<b>Historique</b>	<b>37</b>
<b>4.3</b>	<b>De la transformée de Fourier à la transformée en ondelettes</b>	<b>39</b>
<b>4.4</b>	<b>La transformée en ondelettes continue de Cauchy</b>	<b>42</b>
4.4.1	L'ondelette mère de Cauchy ou de Paul et la TOCC	42
4.4.2	Les effets de bords	43
4.4.3	Extraction des arêtes	44
<b>4.5</b>	<b>Estimation des paramètres modaux</b>	<b>46</b>
4.5.1	Cas de la pseudo-pulsation propre	47
4.5.2	Cas du taux d'amortissement	47
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de rappeler brièvement un outil de traitement des signaux que nous allons utiliser par la suite : l'analyse continue en ondelettes. Cet outil va nous permettre de trouver l'évolution temporelle des paramètres modaux du système (fréquences propres, amortissements modaux et formes modales) et finalement localiser en temps le changement de masse de notre système dynamique discret. La transformation de Fourier est un outil très répandu et bien adapté pour l'analyse de nombreux signaux. Pourtant, les problèmes occasionnés par les singularités montrèrent les limites de cette approche. Un défaut de la transformée de Fourier est de cacher l'information sur le temps : elle nous informe quant au nombre de fréquences contenues dans le signal, mais tait l'instant d'émission des diverses fréquences. Ainsi, vu notre souhait de pouvoir récupérer l'instant auquel le système change de masse, il nous est apparu intéressant de travailler avec un outil qui décompose un signal à la fois en temps et en fréquence : la transformée en ondelettes continue (TOC) où les ondelettes seraient l'équivalent d'une partition pour un signal, indiquant non seulement quelles notes (fréquences) on doit jouer mais aussi à quel moment on doit les jouer.

Ce chapitre n'a pas la prétention de décrire de façon générale et détaillée la transformation en ondelettes, il existe de nombreux ouvrages de mathématiciens reconnus comme Daubechies, Mallat, Meyer ou Torrésani pour n'en citer que quelques-uns, mais plutôt de donner des bases et des propriétés qui nous ont été utiles pour notre utilisation future de cet outil. Il est divisé en cinq paragraphes : le premier 4.2 redonne les grandes lignes de l'histoire de la transformation en ondelettes. Ensuite, nous montrons les différences entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes dans le paragraphe 4.3. De plus, nous choisissons d'utiliser la transformée en ondelettes continue de Cauchy et délimitons un domaine temporel suffisant dans le paragraphe 4.4. Enfin, nous cherchons à estimer les paramètres modaux d'un signal en utilisant la transformée en ondelettes continue de Cauchy dans le paragraphe 4.5.

## 4.2 Historique

Historiquement [77], l'analyse en ondelettes possède de nombreuses origines différentes. Une grande partie du développement de la transformée en ondelettes (TO) a été réalisée dans les années 1930. À l'époque, les efforts séparés ne semblent pas faire partie d'une théorie cohérente. Avant 1930, la branche principale des mathématiques menant aux ondelettes a commencé avec Joseph Fourier en 1807 avec ses théories de l'analyse en fréquence, maintenant souvent désignée comme la transformée de Fourier (TF).

Après 1807, en examinant de près les fonctions  $f$ , la notion de convergence des séries de Fourier et les systèmes orthogonaux, les mathématiciens ont été amenés progressivement de l'analyse en fréquence à l'analyse en échelle. Cette analyse sur  $f$  se fait en créant des structures mathématiques qui varient en dimension, c'est-à-dire en construisant une fonction, la déplaçant d'un certain coefficient et en changeant son échelle. Les chercheurs appliquent cette structure à l'approximation d'un signal, puis répètent la procédure en prenant la structure de base, la déplaçant et en changeant encore une fois son échelle. Cette procédure est appliquée sur le même signal afin d'obtenir une nouvelle approximation et ainsi de suite. Il s'avère que ce genre d'analyse en échelle est moins sensible au bruit, car il mesure les fluctuations moyennes du signal à différentes échelles ; c'est l'analyse temps-fréquence.

En effet, cette analyse est devenue indispensable dans le domaine du traitement des images, la compression et le stockage d'une grande base de données. Mathématiquement, l'analyse multi-échelle se base sur le changement de l'échelle; en d'autres termes, la compression et la dilatation d'un objet. Ainsi, mathématiquement parlant, cette analyse est similaire à l'analyse temps-fréquence qui se base sur l'analyse en bandes de fréquences.

La première notion sur les ondelettes apparaît dans une annexe de la thèse de Haar en 1909 [33]. Une propriété de l'ondelette de Haar est qu'elle a un support compact, ce qui signifie qu'elle s'annule en dehors d'un intervalle fini. Malheureusement, les ondelettes de Haar ne sont pas continûment différentiables ce qui limite leur domaine d'applications.

Dans les années 1930, plusieurs groupes travaillent indépendamment sur la recherche des représentations des fonctions à l'aide des fonctions de base à échelle variable. Comprendre les concepts des fonctions de base et celles à échelle variable est la clé pour la compréhension des ondelettes. Pour plus de détails sur les fonctions de base, le lecteur est invité à consulter [12, 75].

En utilisant une fonction de base à échelle variable appelée aussi la fonction de base de Haar, le physicien des années 1930, Lévy [57], a étudié le mouvement brownien : un type de signal aléatoire. Il a trouvé que la fonction de base de Haar est plus favorable que celle de Fourier pour l'étude des petits détails dans le mouvement brownien [61].

Une autre étude intéressante en 1930 par Littlewood et Paley [55] développe le calcul de l'énergie d'une fonction. Le calcul donne des résultats différents si l'énergie est concentrée autour de quelques points ou distribuée sur un intervalle plus grand. Ce résultat a perturbé les scientifiques car il signifie que l'énergie n'est pas conservée. Plus tard, les chercheurs ont découvert une fonction qui peut varier en taille et peut économiser de l'énergie lors du calcul de l'énergie. Ce travail étant utile, Marr [58] développe un algorithme efficace pour le traitement numérique de l'image avec les ondelettes dans les années 1980.

Entre 1960 et 1980, les mathématiciens Weiss et Coifman [16] ont étudié les éléments les plus simples d'une fonction spatiale, appelés atomes, dans le but de trouver les atomes d'une fonction commune aussi que les règles d'assemblage qui permettent la reconstruction de tous les éléments de la fonction spatiale à l'aide de ces atomes. En 1980, Grossman et Morlet [31], un physicien et un ingénieur, définissent les ondelettes dans le cadre de la physique quantique. Ces deux chercheurs ont fourni une nouvelle façon de réflexion pour les ondelettes basée sur l'intuition physique.

En 1990, inspiré par ces résultats, Meyer [61], un des auteurs marquants de ce domaine, a construit les premières ondelettes non triviales : contrairement aux ondelettes de Haar [33], les ondelettes de Meyer sont continûment différentiables, mais ne sont pas à support compact. Les études de Meyer forment une révolution dans le domaine du traitement du signal, de la statistique, et ont une influence profonde sur l'ensemble de l'analyse mathématique. En effet, si les décompositions multi-échelles était un outil familier aux spécialistes du traitement du signal et de l'image, la formalisation mathématique qu'en donnent les bases d'ondelettes leur donnent une puissance incomparable. Parmi les proches collaborateurs d'Yves Meyer, et qui, à ses côtés, feront le succès des ondelettes, on peut citer Mallat [59] qui découvrira les algorithmes de décomposition rapide, outil indispensable pour transformer une belle théorie mathématique en un outil utilisable pour effectuer le traitement des signaux et des images en temps réel. Quelques années plus tard, Daubechies [18] a utilisé les travaux de Meyer pour construire un ensemble de fonction de base orthonormale par les ondelettes qui sont devenues les plus répandues de nos jours. Elle découvrira les ondelettes à support compact.

L'analyse en ondelettes est ainsi devenue une méthode intéressante pour résoudre des problèmes

difficiles en mathématiques, physique et ingénierie avec des applications aussi diverses que la propagation des vagues, la compression des données, le traitement du signal, le traitement d'image, la reconnaissance d'un modèle, l'infographie, la détection des avions et sous-marins, la compression des empreintes digitales, le débruitage des données bruitées et autres technologie de l'image médicale. Les ondelettes permettent également aux données de la musique, de la parole et des images d'être décomposées en formes élémentaires à différentes positions et échelles et par la suite reconstruites avec une grande précision.

### 4.3 De la transformée de Fourier à la transformée en ondelettes

La Transformée de Fourier (TF) est un outil puissant pour l'analyse fréquentielle d'un signal stationnaire. Soit  $\mathbf{x}(t)$  la réponse d'un système dynamique déterminée à l'aide de capteurs de déplacements. La transformée de Fourier d'un signal  $\mathbf{x}(t)$  intégrable est définie par [50, 56, 82] :

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.1)$$

où  $\omega$  désigne la pulsation angulaire du signal. Il est possible de reconstruire le signal grâce à la formule d'inversion :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{x}}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.2)$$

La TF possède plusieurs propriétés comme la transposition, la conjugaison, le changement d'échelle, la translation, la modulation etc. On s'intéresse à deux propriétés en particulier : la linéarité de la transformée de Fourier, puisque la TF de la somme des signaux est égale à la somme des TF des signaux, et la dérivation par rapport à la variable temporelle  $t$ . En effet :

$$(\widehat{\mathbf{x}^{(m)}(t)})(\omega) = (i\omega)^m \hat{\mathbf{x}}(\omega) \quad (4.3)$$

On en déduit que, si  $\hat{\mathbf{x}}(\omega)$  est la TF du signal de déplacement, donc  $i\omega\hat{\mathbf{x}}(\omega)$  est celle du signal de vitesse et par la suite  $-\omega^2\hat{\mathbf{x}}(\omega)$  est celle du signal d'accélération. Donc les résultats des TFs de déplacement, de vitesse et d'accélération sont reliés. Ainsi l'amplitude du module de la TF pour les composantes haute fréquence est amplifié par  $\omega^2$  entre le signal de type déplacement et celui de type accélération. Travailler avec des signaux de type accélération permet donc de mieux visualiser la plus haute fréquence contenu dans le signal.

La transformée de Fourier est riche d'informations sur le signal analysé : ainsi, par exemple, si elle n'a que des faibles valeurs pour des valeurs élevées de la variable de fréquence, ceci signifie que le signal varie lentement. Inversement, si elle prend des valeurs importantes pour les hautes fréquences, le signal contient une quantité non-négligeable de hautes fréquences, et donc varie rapidement, au moins dans certaines zones. Nous touchons du doigt l'une des limitations importantes de l'analyse de Fourier usuelle. La transformée de Fourier est incapable de localiser les portions du signal dans lesquelles les variations sont rapides, ni celles où elles sont lentes. La loi de variation de la fréquence en fonction du temps est porteuse d'informations, très difficile à extraire par l'analyse de Fourier comme le dit Yves Meyer<sup>(1)</sup>. Ainsi, les signaux transitoires qui évoluent dans le temps

1. Citons à ce propos, les mots du Professeur Yves Meyer : *"l'impossible quête de la fréquence instantanée"*.

d'une manière imprévisible, ne peuvent plus être représentés comme une superposition d'ondes mais comme une superposition d'ondes de courte durée (gaborettes, ondelettes).

Nous avons retenu la définition suivante pour la TO d'un signal  $\mathbf{x}(t)$  continu par morceaux sur  $t$ ,

$$T_\psi[x](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{\psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (4.4)$$

où  $\psi$  est la fonction analysante, appelée ondelette mère que l'on recherche avoir de bonnes propriétés de localisation en temps et en fréquence et  $\bar{\psi}$  est le complexe conjugué de  $\psi$ . Dans la relation (4.4), nous voyons apparaître une famille d'ondelettes  $\psi_{(b,a)}(t)$  engendrée par des dilatations et translations d'une fonction  $\psi(t)$  :

$$\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{a} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \quad (4.5)$$

où  $a$  est un paramètre relatif à l'échelle qui mesure le degré de la compression ou de la dilatation et  $b$  un paramètre relatif au temps qui détermine la translation en temps. Nous avons retenu la normalisation des ondelettes en norme  $L^1(\mathbb{R})$  de telle sorte que  $\|\psi_{(b,a)}\|_1 = \|\psi\|_1$ .

Pour qu'une fonction analysante  $\psi$  soit candidate pour être une ondelette mère, il faut que le coefficient  $C_\psi$  donné par :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \left| \hat{\psi}(a\omega) \right|^2 \frac{da}{a} \quad (4.6)$$

soit fini, non nul et indépendant de  $\omega$ .

La localisation en fréquence d'une ondelette mère  $\psi$  se définit par  $\omega_\psi$  la moyenne (espérance) de la TF de  $\psi_{(b,a)}$  normalisée, appelée le centre fréquentiel, et  $\Delta\omega_\psi$  son écart-type représentant la résolution fréquentielle.

Afin de quantifier cette localisation et afin de pouvoir différentier plusieurs ondelettes mères, Le et Argoul [51] ont introduit le facteur  $Q$ , bien connu en analyse fréquentielle classique des filtres à  $Q$  constant. Ce facteur est défini comme le rapport entre le centre fréquentiel et la résolution fréquentielle de l'ondelette mère :

$$Q = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (4.7)$$

où,

$$\omega_\psi = \int_{\mathbb{R}} \omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \quad (4.8)$$

$$\Delta\omega_\psi = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_\psi)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.9)$$

L'absence de la notion temporelle de la TF dans l'analyse des systèmes non stationnaires a été remédiée avec la TO. Pour conserver les informations sur le temps, ce que la TF ne peut pas faire,

on prend une fonction analysante  $\psi$  qui soit localisée en temps et en fréquence [74]. On décompose ainsi un signal en atomes temps-fréquence. Chaque atome se représente symboliquement sur le plan temps-fréquence, par un rectangle dont l'abscisse est l'intervalle temporel et l'ordonnée est l'intervalle fréquentiel comme le montre la figure (4.1) (Erlicher et Argoul [21]). La localisation en temps de cette fonction  $\psi$  se définit par  $t_\psi$  la moyenne (espérance) de l'ondelette mère normalisée appelée le centre temporel et  $\Delta t_\psi$  son écart-type représentant la résolution temporelle. La translation et la dilatation de la fonction  $\psi(t)$  sont conditionnées par le principe d'incertitude de Heisenberg tel que :

$$\mu_\psi = \Delta t_\psi \Delta \omega_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

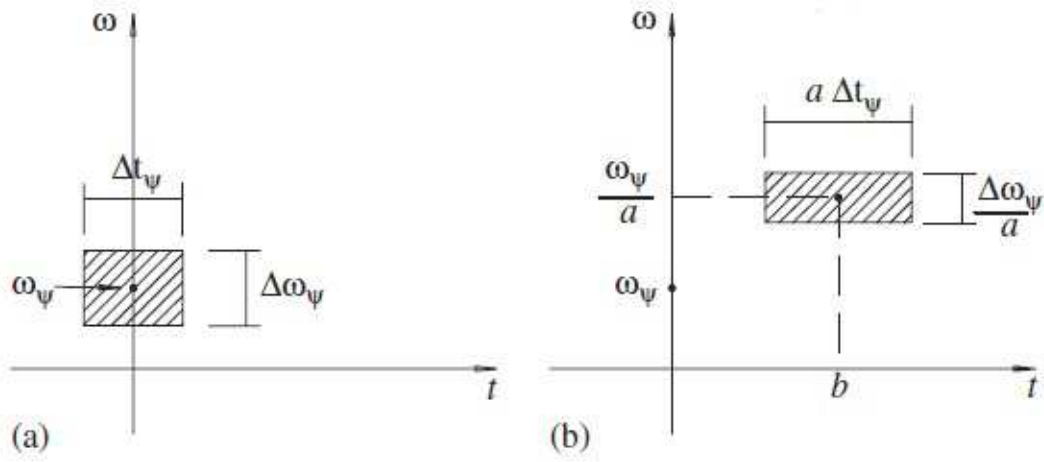


FIGURE 4.1. Résolution en temps et en fréquence : (a) de la fonction analysante  $\psi(t)$  et (b) de la fonction  $b$ -translatée et  $a$ -dilatée avec  $b$  quelconque et  $a > 0$  [21].

La définition de l'ondelette mère nécessite seulement qu'elle appartienne à  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , mais pour des raisons pratiques, la fonction  $\psi(t)$  jouant le rôle d'une fenêtre, il est préféré [14] que  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Cette condition assure que l'ondelette mère est bornée et que la transformée en ondelettes correspondante l'est aussi.

Il a été aussi démontré [50] que les résultats des transformées en ondelettes d'un signal de type déplacement, de type vitesse et de type accélération sont reliés entre elles au moyen des ondelettes mères et de leurs dérivées au premier et au deuxième ordre respectivement.

Dans l'équipe Dynamique à Navier, trois ondelettes mères complexes ont été choisies pour le traitement des signaux modulés en temps et en fréquence. La première est l'ondelette mère de Morlet [1], la deuxième est l'ondelette de Cauchy [3] et la troisième est l'ondelette harmonique proposée par Newland [65].

Lorsque  $u(t) = \cos(\omega_1 t)$ , on a :  $\hat{u}(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$  et par suite :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2} \left( \hat{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b} + \hat{\psi}(-a\omega_1) e^{-i\omega_1 b} \right).$$

Si l'ondelette analysante est progressive, alors

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2} \hat{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b} \quad \text{et} \quad |T_\psi[u](b, a)| = \frac{1}{2} |\hat{\psi}(a\omega_1)|.$$



Cette dernière expression est indépendante de  $b$  ; elle est maximum lorsque  $a\omega_1 = \max_{\omega} |\hat{\psi}(\omega)| = \omega^{(1)}$ . Par conséquent, lorsque  $a = \frac{\omega^{(1)}}{\omega_1}$ , la TOC est maximum ce qui représente dans le plan temps-échelle  $(b, a)$ , une demi-droite horizontale et introduit les notions d'arête et de squelette qui seront généralisées plus loin, pour un signal modulé en amplitude et en phase.

## 4.4 La transformée en ondelettes continue de Cauchy

Afin de choisir les ondelettes mères les mieux adaptées, Le [50], a proposé dans sa thèse un ensemble de critères. Il remarque que l'ondelette harmonique a une mauvaise localisation en temps et donc retient l'ondelette de Morlet et l'ondelette de Cauchy. Il propose ensuite une méthode d'identification des paramètres des systèmes mécaniques linéaires et faiblement non linéaires en rigidité, fondée sur la transformée en ondelettes en comparant deux ondelettes mères Morlet et Cauchy. Il traite les réponses temporelles libres de la structure. Argoul *et al.* [4] utilisent les réponses après choc d'un test réel (bâtiment) et utilisent une procédure semblable pour la détermination des fréquences propres, du taux d'amortissement et des déformées modales par l'ondelette mère de Cauchy [63].

Plusieurs raisons nous ont conduit à préférer l'utilisation d'ondelettes progressives à la place d'ondelettes réelles pour l'analyse de signaux réels [76] : (1) facilité de reconstruction avec des ondelettes progressives à cause de la propriété hermitienne de la transformée de Fourier du signal réel étudié et (2) difficultés avec des ondelettes réelles pour établir un lien avec un spectre local nécessairement réel que l'on souhaiterait associer au signal réel comme avec la transformation de Fourier.

### 4.4.1 L'ondelette mère de Cauchy ou de Paul et la TOCC

Les relations définissant l'ondelette mère ainsi que les paramètres de résolution pour l'ondelette de Cauchy ou de Paul sont présentées dans le tableau (4.1). Dans ce tableau,  $n$  est un paramètre pouvant être modifié suivant la résolution désirée (qui sera déterminé en fixant le facteur de qualité  $Q$ ) et  $\mathcal{H}$  est la fonction d'Heaviside [9].

Jusqu'à présent, la définition de la TO se présente sous la forme d'une intégrale en supposant que les signaux étudiés sont des fonctions continues. Or, en réalité, les signaux que nous étudions sont des signaux discrets ou échantillonnés.

Nous cherchons à appliquer une version discrète de la TO réalisée sous Matlab. Intuitivement, nous pensons à la discrétisation de l'intégrale, mais son algorithme est assez coûteux en temps de calcul [50]. Certains peuvent voir la TO comme le produit de convolution entre le signal et l'ondelette. Cette procédure n'est pas tellement intéressante pour le cas des signaux périodiques [50]. Pour cela, nous retenons dans notre cas le calcul par la transformation de Fourier rapide. La transformation de Fourier rapide appliquée à des signaux à support borné de longueur  $T$  approche la transformation de Fourier du signal périodisé de période  $T$ . Dans le cas de nos signaux de réponses transitoires dont l'amplitude décroît de façon exponentielle, il est possible d'ajouter des zéros (zero padding) afin de rendre le résultat de la transformée de Fourier rapide plus proche de la transformée de Fourier du signal réel.

Cette procédure s'effectue en utilisant les algorithmes *fft* et *ifft* de Matlab. Ceci revient à transposer le calcul de la TO dans le domaine fréquentiel pour obtenir :

$$T_\psi[x](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{\psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) \widehat{\bar{\psi}}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) peut être considérée comme la transformation de Fourier inverse du produit  $\widehat{x}(\omega) \widehat{\bar{\psi}}(a\omega)$ . D'où l'idée du calcul de la TO avec les deux fonctions *fft* et *ifft* de Matlab.

De plus, à partir de la transformée en ondelettes  $T_\psi[x](b, a)$  d'un signal  $x(t)$ , il est possible de reconstruire ce signal tel que :

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} T_\psi[x](b, a) \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) da db \quad (4.12)$$

si la condition d'admissibilité sur  $C_\psi$  est vérifiée :

$$0 < C_\psi < +\infty \quad (4.13)$$

---

Paramètres de l'ondelette de Cauchy

---

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \left( \frac{i}{t+i} \right)^{n+1} \\ \widehat{\psi}(\omega) &= \frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} \mathcal{H}(\omega) \\ C_\psi &= \frac{4\pi^2 (2n-1)!}{2^{2n} (n!)^2} \\ t_\psi &= 0 \\ \omega_\psi &= n + \frac{1}{2} \\ \Delta\omega_\psi &= \frac{\sqrt{2n+1}}{2} \\ \Delta t_\psi &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ \mu_\psi &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{2n-1}} \\ Q &= \frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$


---

TABLEAU 4.1. *Ondelette mère de Cauchy - Définitions*

#### 4.4.2 Les effets de bords

Du fait que le signal échantillonné a une durée finie, lors du calcul de la TO, il existe une “anomalie” aux bords en temps du domaine temps-fréquence, appelée l'effet de bord [51]. Ce problème a été abordé par Salvic [71] et par Le [50] qui ont tenté d'y remédier. Cependant, il est montré [21] que l'on peut définir un domaine où l'effet de bord peut être négligé. Le et Argoul [21, 50] introduisent deux coefficients réels  $c_t$  et  $c_f$  supérieurs ou égaux à 1 et tels que :

lorsque  $t \notin [t_\psi - c_t \Delta t_\psi, t + c_t \Delta t_\psi]$  et  $\omega \notin [\omega_\psi - c_f \Delta \omega_\psi, \omega + c_f \Delta \omega_\psi]$ ,  $\psi(t)$  et  $\hat{\psi}(\omega)$  ont des amplitudes très faibles (proches de 0), conduisant à de bonnes propriétés de décroissance des fonctions correspondantes. Une étude sur la propriété décroissante des ondelettes mères de Cauchy et de Morlet a été réalisée par Le, et finalement, Le conduise à proposer de choisir :  $c_t = c_f = 5$ . Une procédure plus générale pour estimer la valeur du paramètre  $c_t$  est donnée dans [21] sans faire référence à une ondelette particulière à l'aide de l'inégalité de Gauss-Winkler.

En posant  $L$  la longueur de temps du signal enregistré, le domaine dans le plan temps-fréquence où les effets de bord sont négligeables est limité par deux hyperboles et deux lignes horizontales telles que :

- les deux hyperboles sont définies par :

$$\omega = \frac{2c_t Q \mu_\psi}{b} \quad (4.14)$$

et

$$\omega = \frac{2c_t Q \mu_\psi}{L - b} \quad (4.15)$$

- les équations des deux lignes horizontales sont :

$$\omega = 0 \quad (4.16)$$

et,

$$\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + \frac{c_f}{2Q}} \quad (4.17)$$

avec  $f_{Nyquist} = \frac{1}{2L}$ .

Vu que les coefficients  $c_t \geq 1$  et  $c_f \geq 1$ , l'intervalle de temps utile est plus petit que la durée  $L$  et l'intervalle de fréquence utile est plus petit que la fréquence  $f_{Nyquist}$ .

Ainsi, un domaine dans lequel l'effet de bord peut être négligé a été déterminé et sera utile lors de la procédure d'identification pour limiter la procédure dans le domaine temps-fréquence où les informations restent "pertinentes". Pour nos signaux transitoires, la représentation au moyen de la TO dans le plan temps-fréquence se concentre le long des courbes appelées arêtes. La valeur de la TO sur ces courbes arêtes, appelée "squelette" peut alors être calculée. La définition des arêtes et les relations entre le signal et le squelette sont données dans le paragraphe suivant.

#### 4.4.3 Extraction des arêtes

Dans sa thèse, T.P. Le [50] définit une arête comme étant l'ensemble  $A_1$  des points  $(b, a_r(b))$  du plan temps-fréquence tel que le module de la transformée en ondelettes est maximal :

$$A_1 = \left\{ (b, a_r(b)); \forall b \geq 0, \| T_\psi \| (b, a_r(b)) = \max_a | T_\psi[x](b, a) | \right\} \quad (4.18)$$

La restriction de la transformée en ondelettes à l'arête est appelée "squelette" et contient l'information principale [9].

L'extraction des arêtes peut se faire par plusieurs algorithmes proposés par Torrèsani [76] et Carmona *et al.* [10] comme la méthode de Marseille, la méthode Corona et la méthode Crazy Climbers. Nous avons choisi d'utiliser l'extraction des arêtes par l'algorithme de Crazy Climbers

développé au sein de l'équipe Dynamique de l'UR Navier [69]. Celui-ci est basé sur le principe de "recuit simulé".

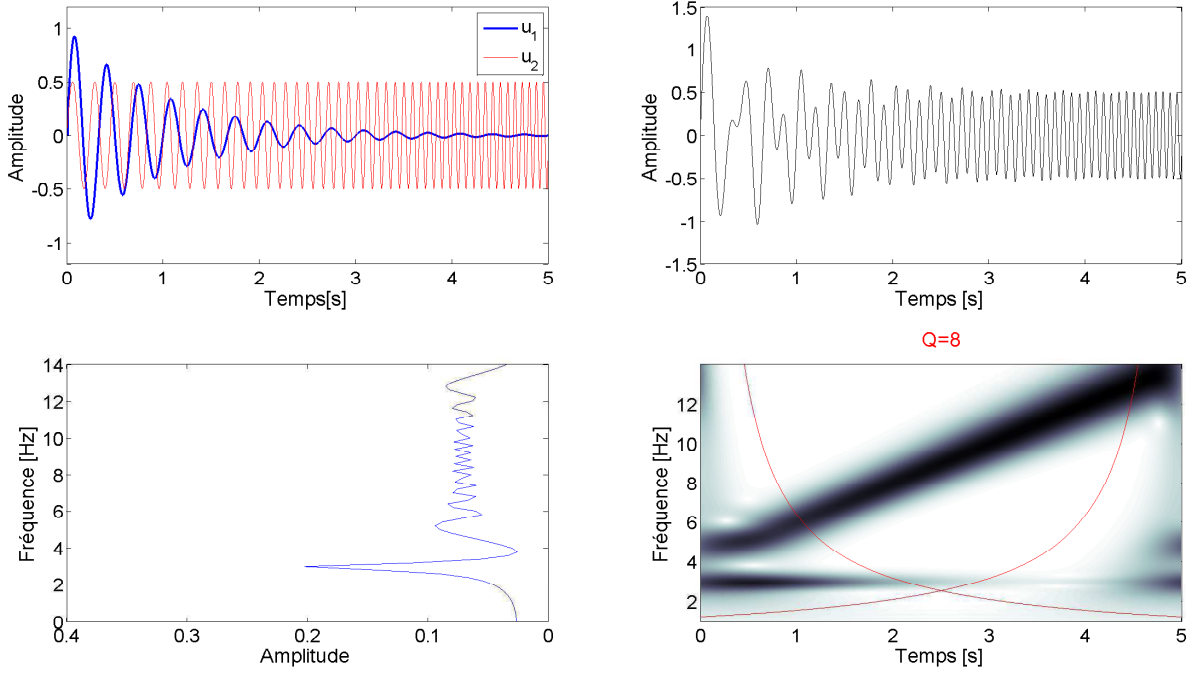


FIGURE 4.2. Représentations temporelle, fréquentielle et temps-fréquence du signal étudié.

Prenons ensuite un exemple pour illustrer nos propos. Soit le signal  $x(t)$  composé de la somme du signal  $u_1(t) = e^{-t} \sin(2\pi \cdot 3t)$  et du signal  $u_2(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot (t^2 + 4t))$ . Le premier terme est un signal oscillant avec une amplitude décroissant exponentiellement comme nos réponses transitoires. Le second terme est aussi un terme oscillant mais cette fois avec une période variable en fonction du temps (cas non stationnaire). Ce signal est illustré dans la figure (4.2) où sont tracés les deux composantes du signal, en bleu pour  $u_1$  et en rouge pour  $u_2$  (en haut à gauche), le signal temporel (en haut à droite), le module de la TF du signal (en bas à gauche) et enfin le module de la TO du signal (en bas à droite) où sont également tracées les deux hyperboles délimitant le domaine où l'effet de bord est négligeable.

Les arêtes  $a_{rj}(b)$  pour  $j$  variant de 1 à 2 sont extraites par la méthode du crazy climber et tracées dans la figure (4.3) où l'arête  $a_{r1}(b)$  correspondant à la composante  $u_1$  est en bleu (droite horizontale) et celle  $a_{r2}(b)$  correspondant à la composante  $u_2$  est en rouge (droite de pente +2 dans la zone où l'effet de bord est négligeable).

Enfin le logarithme du squelette sur chaque arête (logarithme du module de la TO sur l'arête) :  $\ln |T_{\psi_n}[x_k(t)](b, a_{rk}(b))|$  est tracé pour chaque arête dans la figure (4.4) : en bleu pour la composante  $u_1$  et en rouge pour la composante  $u_2$ . On remarque que la pente de la courbe bleue caractérise l'amortissement de cette composante tandis que la courbe rouge est dans le domaine où l'effet de bord négligeable, assimilable à une droite horizontale (amortissement nul).

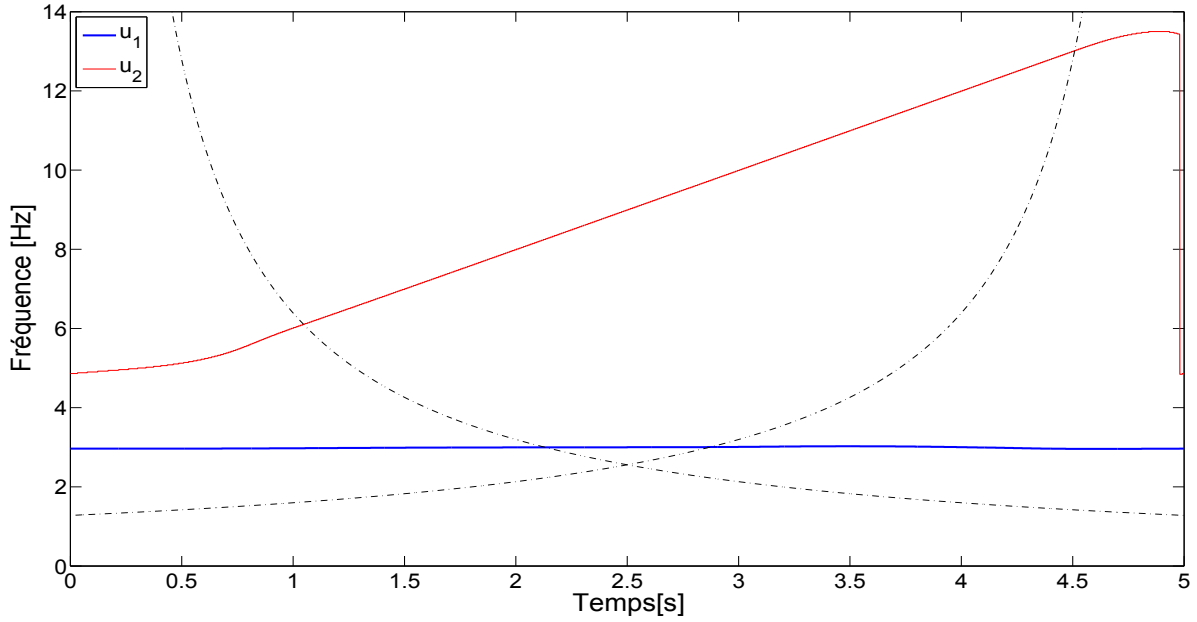


FIGURE 4.3. Les deux arêtes du signal  $x(t) = e^{-t} \sin(2\pi \cdot 3t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot (t^2 + 4t))$ .

## 4.5 Estimation des paramètres modaux

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, les réponses libres pour des systèmes mécaniques à  $n$  degrés de liberté peuvent s'écrire comme la somme de composantes  $x_k(t)$  modulées en amplitude et en phase :

$$x(t) = \sum_k x_k(t) = \sum_k A_k(t) \cos(\alpha_k(t)) \quad (4.19)$$

Il peut être ensuite montré [51] que sous certaines conditions, ces signaux peuvent être considérés comme asymptotiques, ce qui signifie essentiellement que les variations dues à la phase sont beaucoup plus rapides que celles provenant de l'amplitude. Ces conditions sont vérifiées lorsque le système est linéaire faiblement amorti ou lorsqu'il est faiblement non linéaire ou encore lorsque le système non linéaire a de petites oscillations autour de la position d'équilibre.

Pour des signaux asymptotiques, le signal analytique  $\mathbf{X}(t)$  associé à  $\mathbf{x}(t)$  peut être approché de la forme :

$$\mathbf{X}(t) = \sum_k \mathbf{x}_k(t) = \sum_k A_k(t) e^{i\alpha_k(t)} \quad (4.20)$$

La caractéristique principale de la transformée en ondelettes de signaux asymptotiques est qu'elle se concentre le long de courbes dans le plan temps-fréquence appelées "arêtes" et que la restriction de la TO sur chacune des arêtes appelée le "squelette" de la TO contient un maximum d'information : il est très proche de la composante du signal correspondante [51]. Ainsi pour nos signaux transitoires asymptotiques définis par la relation (4.20), chaque composante  $x_k(t)$  du signal global va produire une arête que nous notons  $a_{rk}(b)$ . Parmi les différentes manières d'extraire les arêtes, nous avons retenu la recherche des maxima du module de la TO.

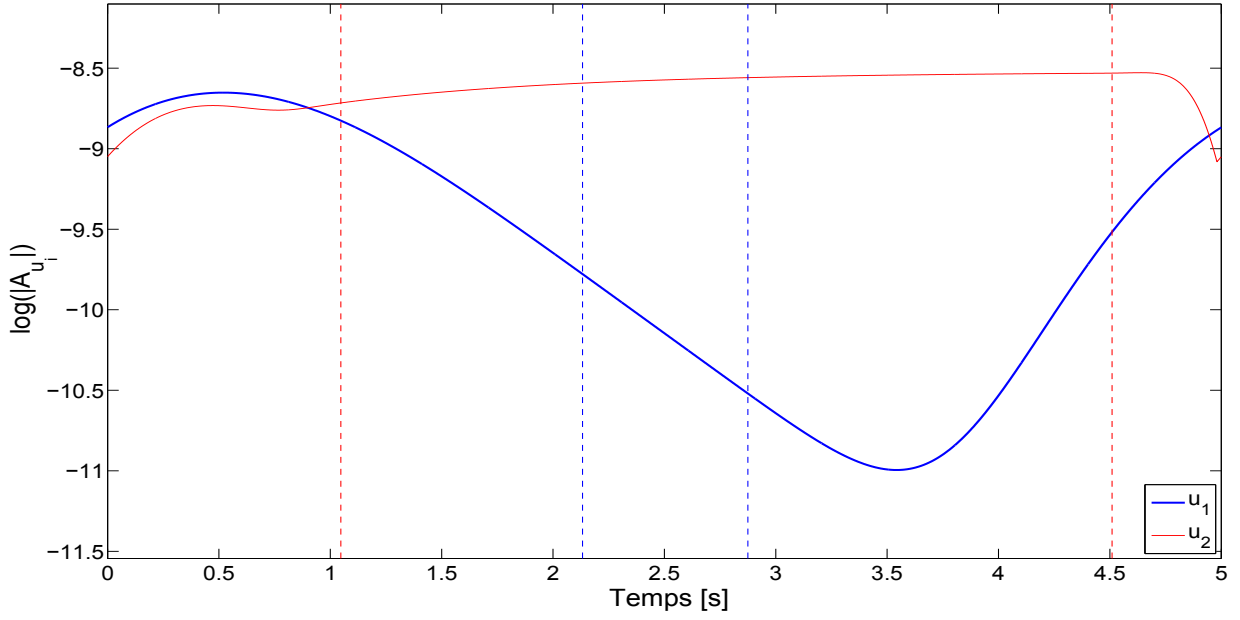


FIGURE 4.4. *Le squelette du signal (échelle logarithmique) :  $\ln |T_{\psi_n}[x_k(t)](b, a_{rk}(b))|$  pour  $k$  variant de 1 à 2.*

Dans le cas présent, pour chaque valeur de  $b$ , nous recherchons les valeurs de  $a$  telles que :  $|T_{\psi_n}[x_k(t)](b, a_{rk}(b))| = \max_a |T_{\psi_n}[x_k(t)](b, a)|$ .

#### 4.5.1 Cas de la pseudo-pulsation propre

La recherche des maxima locaux de la TO nous permet d'obtenir les courbes arêtes qui sont définis par :

$$a_{rk}(b) = \frac{n}{\dot{\alpha}_k(b)} \quad (4.21)$$

A partir de cette relation, nous pouvons en déduire la fréquence angulaire instantanée pour chaque composante du signal :

$$\dot{\alpha}_k(b) = \frac{n}{a_{rk}(b)} \quad (4.22)$$

La courbe ainsi obtenue caractérise l'évolution temporelle de la pseudo-pulsation angulaire propre instantanée  $\dot{\alpha}_k(b)$  pour le mode correspondant. Pour nos réponses libres de systèmes linéaires stationnaires,  $\dot{\alpha}_k(b)$  est exactement la  $k^{\text{ème}}$  pseudo pulsation propre de notre système :

$\tilde{\omega}_k = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ , où  $\zeta_k$  désigne l'amortissement du  $k^{\text{ème}}$  mode.

#### 4.5.2 Cas du taux d'amortissement

Torrésani [76] a montré que pour une ondelette progressive (ici l'ondelette de Cauchy), la valeur du squelette de la TO pour chaque composante  $x_k(t)$  du signal peut s'écrire sous la forme :

$$T_{\psi_n}[x_k(t)](b, a_{rk}(b)) = \frac{1}{2} A_k(b) e^{i\alpha_k(b)} \overline{\psi_n(n)} + r(b, a_{rk}(b)) \quad (4.23)$$

Suivant les propriétés de l'ondelette mère et la régularité de la composante  $x_k(t)$ , Torrèsani donne dans [76] des majorants pour le reste  $r(b, a)$ . Nous voyons donc qu'à partir du squelette, on peut récupérer l'amplitude de chaque composante  $A_k(b)$  du signal.

Pour calculer l'amortissement  $\zeta_k$  du  $k^{\text{ème}}$  mode, nous utilisons la notion de l'amplitude temporelle  $A_k(t)$  de chaque composante modale que nous venons d'extraire à partir du squelette de la TO, qui est définie pour la réponse libre par :

$$A_k(t) = \kappa e^{-\zeta_k \omega_k t} \quad (4.24)$$

où  $\kappa$  est une constante réelle positive et  $\omega_k$  la  $k^{\text{ème}}$  pulsation propre. Si nous prenons le logarithme de l'expression précédente, nous obtenons l'équation d'une droite dont la pente négative est exactement  $-\zeta_k \omega_k$ .

Par conséquent, dans le domaine où les effets de bords sont négligeables, on peut approcher la courbe  $\ln |A_k(t)|$  par une droite (régression linéaire) dont la pente en valeur absolue nous donne directement une estimation du produit  $\zeta_k \omega_k$ . Connaissant  $\tilde{\omega}_k$  et  $\zeta_k \omega_k$ , il est facile d'obtenir  $\zeta_k$ .

Les modes propres peuvent être aussi identifiés à l'aide de la TO (cf. [51] pour les détails) mais non présentés ici car ils ne seront pas utilisés par la suite.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé la définition et les propriétés intéressantes de la TO et plus particulièrement celles en rapport avec l'ondelette mère de Cauchy que nous avons retenue pour notre étude future. La procédure pour le calcul numérique est divisée en quatre étapes :

- Étape (a) : calcul numérique de la TO avec la *fft* et la *ifft* (transformées de Fourier rapides directe et inverse)
- Étape (b) : détermination des effets de bords pour le domaine
- Étape (c) : extraction des arêtes et du squelette correspondant
- Étape (d) : identification des fréquences modales et amortissements modaux si besoin.

Dans la suite, nous allons mettre en œuvre les outils présentés et nous les appliquerons sur des simulations numériques et sur des réponses transitoires d'une structure réelle de laboratoire.

## Chapitre 5

# Problématique étudiée

---

**N**OUS PRÉSENTONS dans ce chapitre la problématique étudiée, c'est à dire les changements des caractéristiques d'un système dynamique discret du type masse-ressort avec amortisseur. Après la description de l'état quasi-stationnaire étudié, des choix du type des données de mesure analysées et de la matrice de rigidité sont effectués.

---



## PLAN DU CHAPITRE 5

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
<b>5.2</b>	<b>Présentation de l'étude</b>	<b>51</b>
5.2.1	Problème dynamique sans amortissement	55
5.2.2	Choix du type de données de mesures	56
<b>5.3</b>	<b>Matrice de rigidité</b>	<b>57</b>
5.3.1	Cas général	57
5.3.2	Cas particulier	58
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>

---

## 5.1 Introduction

Les méthodes présentées dans les chapitres 3 et 4 ont pour but de détecter et d'évaluer des modifications des caractéristiques des systèmes dynamiques divers. Tous ces systèmes peuvent être assimilés à un système différentiel linéaire d'ordre deux avec ou sans amortissement. De tels systèmes peuvent fonctionner sur une très longue durée en ayant subi des modifications. Cependant, nous considérons que durant le temps de la mesure, le système en vibration est un système stationnaire. Il se peut parfois qu'après la première collecte de mesures, une évolution brutale ou lente des caractéristiques du système ait lieu. Ensuite, une seconde collecte de mesures peut être prise au cours d'un temps de mesure permettant d'assimiler, de nouveau, le système à un système stationnaire.

Dans le cas d'une modification lente ou continue, la transformée en ondelettes (TO) est un outil puissant pour suivre l'effet de ces modifications sur les fréquences propres. En outre, dans le cas d'un changement brutal, la TO permet de détecter l'instant où ce changement est intervenu. Ainsi, grâce à la TO, nous sommes capables de délimiter un intervalle de temps avant le changement et un autre intervalle de temps après le changement.

Une fois la modification des caractéristiques du système détectée, nous cherchons à la préciser. L'étude qui suit se concentre sur l'étude de la variation de la masse : localisation en espace de cette modification (étape 2) et quantification de sa valeur (étape 3). La description de cette problématique (figure (5.1)) est présentée dans le paragraphe 5.2 et consiste à trouver deux périodes où l'état du système est stationnaire séparés par une période transitoire. En fait, on se place dans le cas d'un système dynamique non amorti ayant subi seulement des changements de masse et en considérant que sa rigidité est constante tout le long de notre étude. Un tel système dynamique, ayant subi une ou plusieurs modifications de sa masse initiale, est ensuite présenté dans le paragraphe 5.2.1. Les méthodes utilisées pour trouver les caractéristiques des systèmes dynamiques à un ou deux périodes stationnaires sont présentées dans la figure (5.2). De plus, ayant la possibilité d'analyser les déplacements ou les accélérations du système, un choix est effectué dans le paragraphe 5.2.2. Enfin, nous calculons la matrice de rigidité supposée constante au cours du temps d'observation d'un système encastré-encastré et encastré-libre dans le paragraphe 5.3. Nous choisissons dans la suite d'analyser des systèmes encastrés-libres car les données expérimentales que nous allons analyser au chapitre 9 concernent un système de ce type.

## 5.2 Présentation de l'étude

Dans le cadre du travail effectué au cours de cette thèse, nous cherchons à suivre l'évolution en temps d'un système dynamique lorsqu'une de ses masses locales change à un certain instant  $t_1$ . Ce changement de masse au cours du temps d'observation conduit à décomposer le temps en trois périodes : deux périodes stationnaires, la première  $E_0$  avant le changement de la masse, la deuxième  $E_1$  après la modification de la masse, et une période transitoire  $E_T$  au cours laquelle le système a subi cette modification de masse (figure (5.3)).

Le but de la localisation en temps du changement de la masse est de pouvoir déterminer deux états stationnaires du système avant et après changement. Pour résumer, l'ensemble des différentes périodes est schématisé dans la figure (5.3).

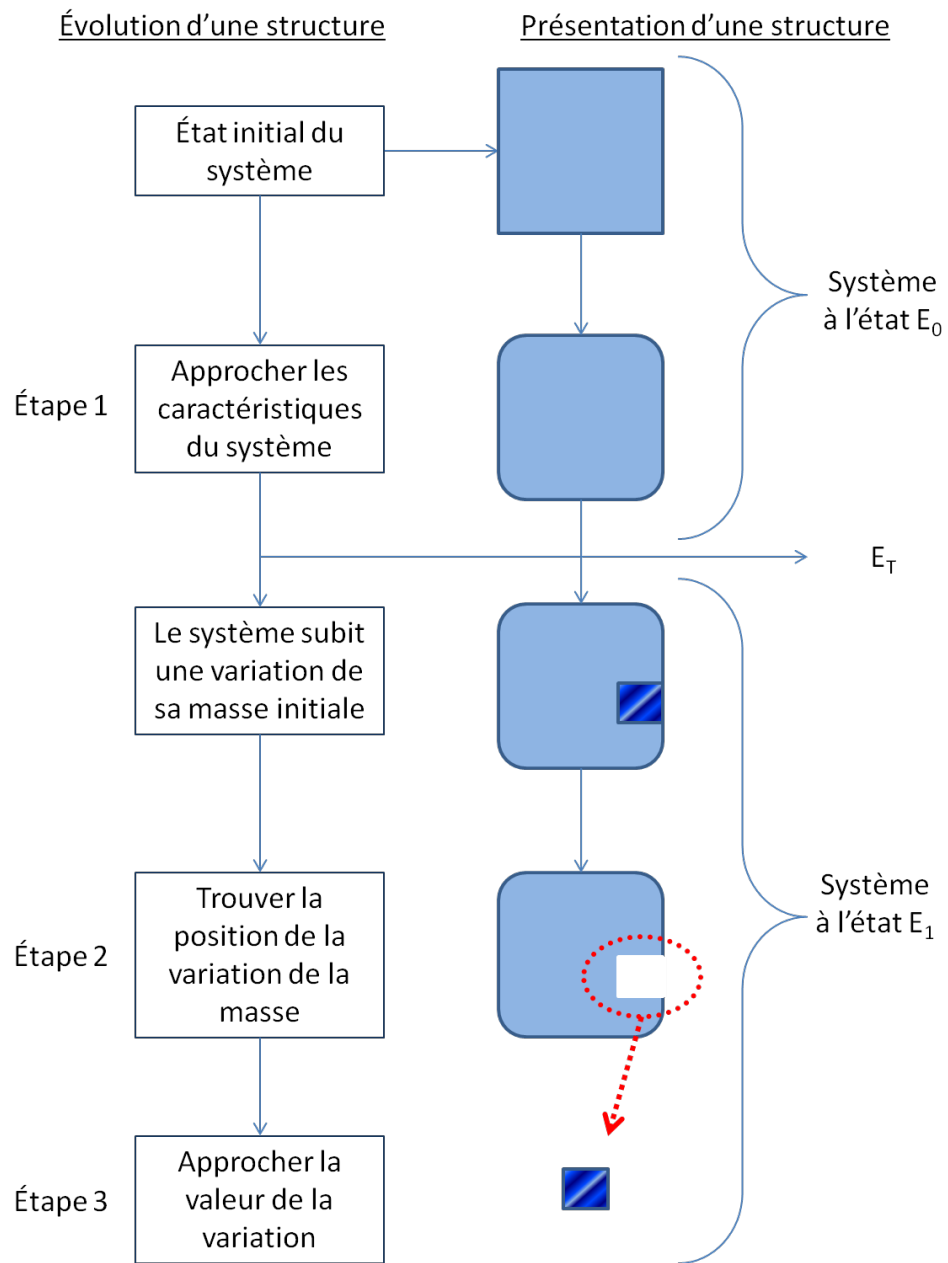


FIGURE 5.1. Schématisation des 3 étapes de l'évolution du système.

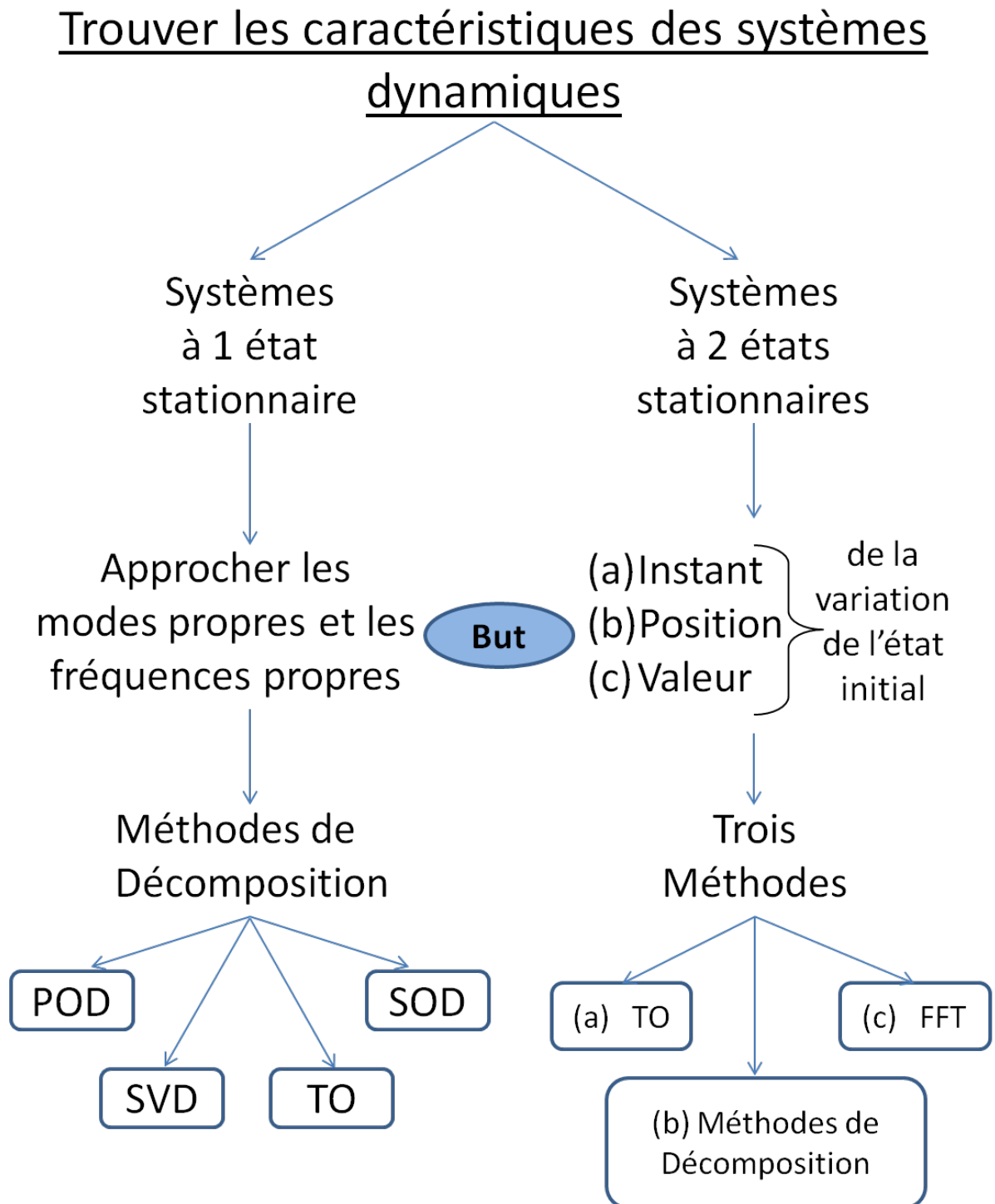


FIGURE 5.2. Identification des caractéristiques des systèmes à 1 ou à 2 états.

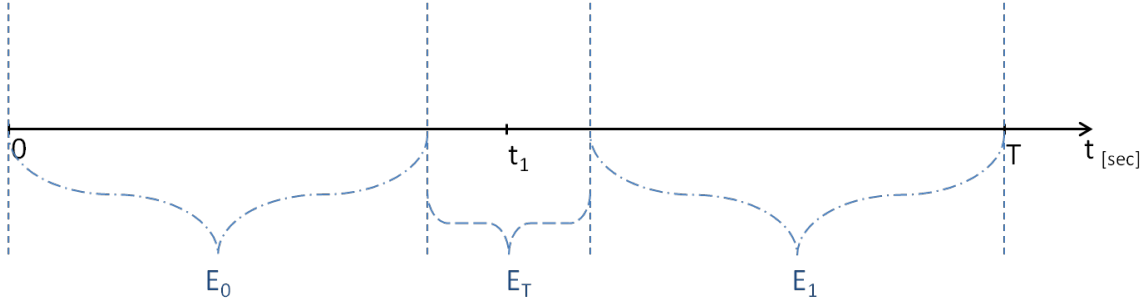


FIGURE 5.3. Schématisation des trois périodes  $E_0$ ,  $E_T$  et  $E_1$  au cours du temps  $[0; T]$ .

Connaissant les données de mesures des deux périodes  $E_0$  et  $E_1$ , et après avoir calculé les modes de vibration, on veut localiser et quantifier la variation de la masse. Une revue des méthodes de détection, de localisation et de caractérisation d'un endommagement des systèmes mécaniques, basées sur les changements des réponses vibratoires, est proposée dans [19].

Dans la suite, nous étudions la détection, la localisation et la quantification de la variation de la masse initiale du système en supposant la rigidité constante au cours du temps  $[0; T]$  en examinant les changements des paramètres modaux.

La recherche des caractéristiques d'un tel système consiste à résoudre trois problématiques différentes :

Étape 1 : Détection de la modification pendant l'observation

Cette problématique consiste à pouvoir détecter l'instant  $t_1$  de la modification de la masse. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, toute modification de la masse entraîne un changement de fréquence. Si l'une des masses du système augmente à l'instant  $t_1$ , les fréquences diminuent à partir de cet instant et vice versa. Pour cela, nous avons introduit dans le chapitre 4 la transformée en Ondelettes (TO) comme outil de calcul des fréquences à tout instant pour la détection de toute modification de la masse du système. La TO permet ainsi de trouver les différentes périodes au cours du temps, en particulier la période transitoire  $E_T$  localisant l'instant  $t_1$  de la modification.

Étape 2 : Localisation en espace de la modification entre deux périodes stationnaires

La localisation en espace revient à chercher la position de la variation de densité localisée d'un système continu. Une fois la détection de la modification effectuée, on se trouve avec les deux états stationnaires  $E_0$  et  $E_1$ . La localisation en espace de cette modification sera effectuée au cours de cette thèse en utilisant les modes propres avant et après modification. Nous avons introduit dans le chapitre 3 différentes méthodes d'analyse de données dans le but d'approcher les modes propres du système. Une fois les modes propres approchés, nous allons nous en servir dans le chapitre 7 pour la détection de la position du changement.

Étape 3 : Quantification de la modification entre deux états stationnaires

Après la détection des deux états stationnaires  $E_0$  et  $E_1$  et après la localisation de la variation de la masse, nous cherchons à quantifier la valeur de la variation de masse dans le chapitre 8. Nous effectuons cette quantification grâce à la variation relative des fréquences entre l'état  $E_0$  et l'état  $E_1$ .

Dans le cadre de l'évaluation des endommagements possibles, les ingénieurs sont intéressés par la quantification des variations de la masse de leurs systèmes. Les bâtiments, les ponts, les câbles,

etc., sont tous des systèmes sujets à des endommagements faibles ou forts au cours du temps. Les ingénieurs, étant responsables de la durée de vie de leurs constructions, trouvent dans l'analyse non destructive un moyen de prédiction des risques possibles et du pourcentage de ces risques. Pour cela, pouvoir préciser l'ordre de grandeur de toute variation de masse par rapport à la masse initial du système devient très intéressant.

Pour suivre l'évolution des modifications de la masse suivant les méthodes proposées dans les chapitres 6, 7 et 8, un exemple numérique complet est présenté dans l'annexe B. Dans cette annexe nous cherchons à localiser le temps, détecter la position et quantifier une diminution de 40 % de la masse locale d'un système à 10 d.d.l.

Notre système, présentant deux périodes stationnaires sur deux intervalles de temps différents, possède deux matrices de réponse : avant et après. Par ailleurs les mesures peuvent être des déplacements ou bien des accélérations selon les instruments de mesure utilisés. Nous décrivons dans le paragraphe 5.2.1 ce problème, puis nous présentons deux choix de type de données de mesures dans le paragraphe 5.2.2.

### 5.2.1 Problème dynamique sans amortissement

Le système à masse variable, comme son nom l'indique, est un système qui, à un certain instant, change de masse, comme par exemple une structure ayant subi des endommagements suite à des activités sismiques. Décrivons ce système.

Soit un système libre non amorti à  $n$  d.d.l quasi-stationnaire. Posons  $k \in \{0, 1\}$  un paramètre indiquant l'état de ce système. Ainsi, à l'état initial  $E_0$ , la matrice de masse initiale est noté  $\mathbf{M}_0$ . À un instant précis  $t_1$ , le système change de masse ; à l'état  $E_1$  après cette modification, la nouvelle matrice de masse est noté  $\mathbf{M}_1$ . La forme matricielle de ce système est telle que :

$$\mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{x}}_k(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

avec  $\mathbf{x}_k(0)$  et  $\dot{\mathbf{x}}_k(0)$  les conditions initiales.  $\mathbf{M}_k$  la matrice de masse à l'état  $E_k$  et  $\mathbf{K}$  la matrice de rigidité sont des matrices symétriques, définies et positives.

Pour résoudre ce système, on suit la même démarche que dans le paragraphe 2.2 du chapitre 2. Posons :

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{M}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}_k(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_k(t) = \mathbf{P}_k \mathbf{r}_k(t) \quad (5.2)$$

avec  $\mathbf{P}_k$  la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{M}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}_k^{-\frac{1}{2}}$ . Le système (5.1) devient :

$$\ddot{\mathbf{r}}_k(t) + \mathbf{diag}(\omega_i^2) \mathbf{r}_k(t) = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

ayant pour solution générale  $r_{ki}(t)$  définie par :

$$r_{ki}(t) = r_{ki}(0) \cos(\tilde{\omega}_i t) + \frac{1}{\tilde{\omega}_i} \dot{r}_{ki}(0) \sin(\tilde{\omega}_i t) \quad (5.4)$$

Rappelons que  $\omega_i$  est la pulsation et  $\tilde{\omega}_i$  est la pseudo-pulsation.

Ainsi la solution du système (5.1) est donnée par :

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{M}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_k \mathbf{r}_k(t) \quad (5.5)$$

Introduisons  $\phi_k$  la matrice des modes propres  $\varphi_{ki}$  du système. Comme il est déjà démontré dans le chapitre 2,  $\phi_k$  s'écrit de la forme :

$$\phi_k = \mathbf{M}_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_k \quad (5.6)$$

La solution générale  $\mathbf{x}_k(t)$  du système initial s'écrit de la forme :

$$\mathbf{x}_k(t) = \phi_k \mathbf{r}_k(t) = \sum_{i=1}^n r_{ki}(t) \varphi_{ki} \quad (5.7)$$

Enfin, la solution de ce système à masse variable est donnée par  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_0 \quad \mathbf{X}_1]$  définie sur l'intervalle de temps  $[0; T]$  telle que  $\mathbf{X}_0$  est la matrice solution du système (5.1) définie sur l'intervalle de temps  $[0; t_1]$  et  $\mathbf{X}_1$  est la matrice solution du système (5.1) définie sur l'intervalle de temps  $[t_1; T]$ .

En pratique, les matrices initiales du système dynamique à  $n$  d.d.l,  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{K}$  sont inconnues. La matrice des données de déplacement  $\mathbf{X}$  de dimension  $n \times m$  est construite de la forme :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & \dots & x_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t_1) & \dots & x_n(t_m) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Pour récupérer une des caractéristiques du système, notre but est de chercher la position désignant la masse locale ayant subi le changement.

### 5.2.2 Choix du type de données de mesures

Deux types de capteurs sont généralement utilisés : des capteurs de déplacement ou des capteurs d'accélération. Le but de ce paragraphe est de montrer l'impact du choix de l'un ou l'autre de ces capteurs.

Soit un signal de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = a \cos(\omega t) \quad (5.9)$$

avec  $a$  l'amplitude,  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $f$  la fréquence du signal.

Si  $\mathbf{x}(t)$  représente l'évolution en temps du vecteur de déplacement, le vecteur représentant l'évolution en temps de l'accélération est de la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t) \quad (5.10)$$

L'amplitude de l'accélération est  $a\omega^2$  si celle du déplacement est  $a$ . Donc pour  $\omega^2 > 1$  l'accélération a une amplitude plus importante que le déplacement et dans ce cas pour étudier des modes correspondant à des fréquences  $f$  telles que  $f > \frac{1}{2\pi} = 0.16$  Hz il est préférable d'utiliser des accéléromètres. Dans le cas contraire, pour des fréquences inférieures à 0.16 Hz les capteurs de déplacement peuvent être préférés.

### 5.3 Matrice de rigidité

Une fois le choix des capteurs effectué, nous cherchons dans ce paragraphe à présenter les différents types de matrice de rigidité utilisés selon les conditions au bord.

#### 5.3.1 Cas général

Nous représentons dans la figure (5.4) un système masse-ressort à  $n$  masses  $m_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  reliées par  $n + 1$  ressorts de raideur  $k_s$  pour  $s \in \{1, \dots, n + 1\}$ .



FIGURE 5.4. *Système masse-ressort encastré-encastré à  $n$  masses  $m_i$  et à  $n + 1$  ressorts de raideur  $k_s$ .*

Le système à  $n$  d.d.l possède  $n$  déplacements de masses :  $x_1, \dots, x_n$ . Le déplacement unitaire ( $x_1 = 1$ ) appliqué à la masse  $m_1$ , en maintenant les déplacements  $x_2, \dots, x_n$  nuls, nécessite l'application de la force  $k_1 + k_2$  à la masse  $m_1$  et  $-k_2$  à la masse  $m_2$ . De même, un déplacement unitaire  $x_i$  appliqué à la masse  $m_i$ , tout en maintenant les déplacements  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$  nuls, nécessite l'application d'une force  $-k_i$  à la masse  $m_{i-1}$  et la force  $-k_{i+1}$  à la masse  $m_{i+1}$  et la force  $k_i + k_{i+1}$  à la masse  $m_i$ . Enfin, le déplacement unitaire ( $x_n = 1$ ) appliqué à la masse  $m_n$ , en maintenant les autres déplacements nuls, nécessite l'application de la force  $k_n + k_{n+1}$  à la masse  $m_n$  et  $-k_n$  à la masse  $m_{n-1}$ . Il en résulte la structure tridiagonale de la matrice  $\mathbf{K}$  d'un système masse-ressort encastré-encastré :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Dans le cas d'un système encastré-libre de la figure (5.5), la construction de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  se fait exactement de la même manière que celle dans le cas des systèmes encastrés-encastrés, à l'exception du déplacement unitaire  $x_n$  de la masse  $m_n$ . En effet, pour assurer un déplacement unitaire de la masse  $m_n$  et maintenir les autres masses à la position d'équilibre, il est nécessaire d'appliquer la force  $k_n$  à la masse  $m_n$  et la force  $-k_n$  à la masse  $m_{n-1}$ . Ainsi la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  est de la forme suivante :



$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

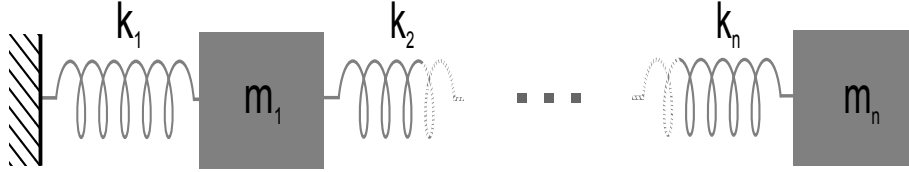


FIGURE 5.5. *Système masse-ressort encastré-libre à  $n$  masses  $m_i$  et à  $n$  ressorts de raideur  $k_i$ .*

### 5.3.2 Cas particulier

Pour les essais numériques présentés au cours de cette partie, nous choisissons des systèmes linéaires discrets à  $n$  d.d.l non forcés (homogènes). Nos essais numériques se basent sur le principe des systèmes masses-ressorts à  $n$  objets de masse  $m = m_1 = \dots = m_n$  reliés par  $n + 1$  ressorts de raideur  $k = k_1 = \dots = k_{n+1}$ . Ces systèmes pouvant être des systèmes encastrés-encastrés schématisés dans la figure (5.6) sont caractérisés par la matrice de masse  $\mathbf{M}$  :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

et la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  :

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$



FIGURE 5.6. *Système masse-ressort encastré-encastré à  $n$  masses  $m$  et à  $n + 1$  ressorts de raideur  $k$ .*

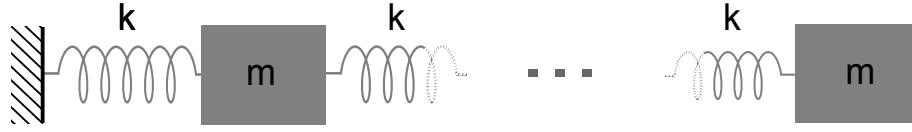


FIGURE 5.7. *Système masse-ressort encastré-libre à  $n$  masses  $m$  et à  $n$  ressorts de raideur  $k$ .*

Ces systèmes, pouvant être aussi des systèmes encastrés-libres schématisés dans la figure (5.7), sont caractérisés par la matrice de masse  $\mathbf{M}$  donnée dans l'équation (5.13) et la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  telle que :

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Dans la suite des études effectuées, nous choisissons toujours de considérer un système encastré-libre vu que ce type de système ressemble au cas expérimental étudié dans le chapitre 9.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le système différentiel étudié et nous avons précisé que nous nous n'étudions que les modifications locales de la masse. Nous avons présenté les trois questions concernant la modification de la masse qui seront étudiées dans les chapitres suivants : la localisation en temps, la position et la quantification de cette modification. Nous avons schématisé ces trois étapes dans la figure (5.1). De plus, nous avons montré que le choix entre les capteurs de déplacement ou d'accélération dépend des fréquences étudiées.

La matrice de rigidité a été explicitée dans le cas où tous les ressorts ne sont pas uniformes car des essais de localisation en espace et de quantification des variations d'un ressort ont été faites mais ne sont pas présentées ici car les résultats sont difficiles à exploiter. Les différents types de conditions au bord ont été présentées. Pour pouvoir comparer avec les résultats de l'étude expérimentale, nous nous concentrerons sur les systèmes masses-ressorts encastrés-libres.

Dans la suite, nous cherchons tout d'abord à détecter l'instant de la modification de la masse en utilisant la TO dans le chapitre 6 (Étape 1). Dans le chapitre 7, nous développons trois méthodes pour la recherche de la position de la masse changée en se basant sur les méthodes de décomposition développées dans le chapitre 3 (Étape 2). La quantification de la variation de la masse est étudiée dans le chapitre 8 suivant la variation relative des fréquences (Étape 3). Nous montrons dans la figure (5.2) les deux cas pour l'identification des caractéristiques des systèmes dynamiques en utilisant différentes méthodes. Enfin, nous mettons toutes ces méthodes en œuvre expérimentalement dans le chapitre 9.



## Chapitre 6

# Localisation en temps des modifications de la masse

---

**C**E CHAPITRE a pour objectif de localiser en temps la modification de masse du système dynamique étudié. Cette localisation en temps s'appuie sur l'observation des variations des fréquences du système. La transformée en ondelettes est donc utilisée pour localiser l'instant du changement de masse.

---

## PLAN DU CHAPITRE 6

---

<b>6.1</b>	<b>Détection de la modification : Étape 1</b>	<b>63</b>
<b>6.2</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>63</b>
6.2.1	Augmentations des masses locales d'un système	64
6.2.2	Diminutions des masses locales d'un système	72
<b>6.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>81</b>

---

Nous allons étudier des systèmes dynamiques linéaires dont la masse, initialement constante, change puis se stabilise de nouveau. Cette modification peut être brutale ou lente. Nous avons décrit dans le chapitre 5 ce type de systèmes, que nous appellerons systèmes dynamiques quasi-stationnaires, et les trois étapes d'évaluation numérique de toute modification de masse de tels systèmes. Comme la modification de la masse entraîne une modification des fréquences propres du système, dans le chapitre 4 nous avons présenté une méthode d'analyse temps-fréquence : la transformée en ondelettes (TO). Nous montrons dans ce chapitre l'efficacité de la TO pour la localisation de l'instant de la modification de la masse.

Dans le paragraphe 6.1 nous présentons une description de l'étape 1 de notre étude. Ensuite, nous présentons, dans le paragraphe 6.2, six cas différents de modifications de la masse, et nous les traitons numériquement à l'aide de la TO. Nous pouvons ainsi vérifier numériquement l'efficacité de la TO pour détecter le moment de la modification de la masse.

## 6.1 Détection de la modification : Étape 1

Comme il est déjà expliqué dans le chapitre 5, nous cherchons dans ce chapitre à résoudre la première étape de l'évaluation de la modification d'un système à masse variable au cours du temps. Cette étape consiste à localiser en temps toute modification de la masse. En d'autres termes, nous visons à récupérer l'instant  $t_1$  où une variation de la masse apparaît. Ainsi, notre objectif est de pouvoir déterminer en temps trois périodes :

- $E_0$  : la période initiale où le système n'est pas modifié,
- $E_T$  : la période transitoire,
- $E_1$  : la période après modification de la masse du système.

On suppose que le système est stationnaire pendant chacune des périodes  $E_0$  et  $E_1$ . Dans le chapitre 4 de cette thèse, nous avons décrit un outil très puissant pouvant servir à récupérer ces trois périodes : la TO. Le calcul de la TO et l'extraction des arêtes permettent, grâce à la variation de ces fréquences, de délimiter en temps les périodes  $E_0$ ,  $E_T$  et  $E_1$ . En effet, suite à une diminution de la masse, les fréquences du système augmentent et vice versa. D'où nous cherchons à détecter l'instant  $t_1$  en étudiant la variation des fréquences.

Dans le paragraphe 6.2, nous étudions plusieurs exemples numériques avec la TO pour retrouver l'instant  $t_1 \in E_T$  de la modification de la masse initiale d'un système dynamique linéaire à  $n$  d.d.l encasté-libre.

## 6.2 Exemples numériques

Que ce soit dans le cas d'une augmentation ou d'une diminution de la masse initiale du système, nous montrons dans ce paragraphe que nous sommes capables de localiser en temps toute modification de la masse grâce à la TO via la variation des fréquences propres du système dynamique. Pour cela nous nous posons tout d'abord dans le cas des systèmes ayant subi une augmentation de masse, puis une augmentation de deux masses en un même instant et ensuite une augmentation de deux masses en deux instants différents. Ces mêmes trois cas sont ensuite étudiés dans le cas des diminutions de masse. Le système testé numériquement est un système libre (sans force extérieure), mais les conditions initiales de déplacement et de vitesse ne sont pas nulles.

### 6.2.1 Augmentations des masses locales d'un système

Nous choisissons d'étudier numériquement un système dynamique non amorti encastré-libre. Nous supposons que ce système à masse homogène est à 10 d.d.l dont la masse totale vaut  $m_T = 20 \text{ kg}$ . Puisque le système possède une matrice de masse initiale  $\mathbf{M}_1$  homogène, chaque masse locale vaut  $\frac{m_T}{n} = 2 \text{ kg}$ . Pour des raisons de précision nous choisissons de numérotter les masses de 1 à 10 en commençant du côté encastré.

Dans ce paragraphe, trois tests sont présentés pour la recherche du moment de la ou des augmentations de masses locales du système :

Test 1 : une augmentation de 50%

Test 2 : deux augmentations de 60%

Test 3 : deux augmentations consécutives de 30% et 60%

Vérifions les résultats obtenus pour chacun de ces tests.

#### Test 1 : une augmentation de 50%

Nous considérons tout d'abord le système qui, après 15 minutes (900 secondes) a subi une augmentation brutale de 50 % de la masse locale 7, c'est-à-dire une augmentation de 5 % de la masse totale du système. Le temps d'observation total est de 30 minutes (1800 secondes). Les fréquences théoriques à l'état initial du système  $F_{th}^{av}$  et les nouvelles fréquences théoriques  $F_{th}^{ap}$  sont mesurées en  $Hz$  et sont présentées par :

$$F_{th}^{av} = \begin{pmatrix} 0,0168 \\ 0,0501 \\ 0,0822 \\ 0,1125 \\ 0,1403 \\ 0,1650 \\ 0,1860 \\ 0,2028 \\ 0,2151 \\ 0,2226 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{th}^{ap} = \begin{pmatrix} 0,0162 \\ 0,0501 \\ 0,0793 \\ 0,1091 \\ 0,1403 \\ 0,1592 \\ 0,1813 \\ 0,2028 \\ 0,2092 \\ 0,2201 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Suite à la remarque donnée dans le paragraphe 5.2.2 du chapitre 5, nous appliquons la TO (en choisissant le facteur  $Q = 50$ ) au signal des accélérations de chacune des 10 masses comme montré dans la figure (6.1). Celle-ci permet de déduire que le système a subi une augmentation de masse vu la diminution des fréquences. De plus, de la zone pointillée en rouge, nous récupérons l'état transitoire lorsque l'ajout de la masse a été effectué. En conséquence, nous délimitons les trois périodes comme suit :

- $E_0 = [103; 800] \text{ s}$  : l'état initial du système,
- $E_T = [800; 950] \text{ s}$  : l'état transitoire lors de l'augmentation de la masse du système,
- $E_1 = [950; 1660] \text{ s}$  : un nouvel état du système.

Dans la zone pointillée de la figure (6.1) les variations des fréquences ne sont pas très claires. Ceci est dû au fait que l'étude des arêtes est effectuée sur toute la bande de fréquence  $[0; 0,25] \text{ Hz}$ . Ainsi, en appliquant la TO sur dix différentes bandes de fréquences nous trouvons dix fréquences.

Elles sont tracées dans la figure (6.2). Pour chaque bande de fréquence nous appliquons la TO par ordre croissant des fréquences en choisissant une valeur du facteur  $Q$  telle que :  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 13$ ,  $Q_3 = 10$ ,  $Q_4 = 15$ ,  $Q_5 = Q_6 = 20$  et  $Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 50$ . Les fréquences récupérées avec la TO avant la modification de la masse sont repérées dans l'état  $E_0$  et celles après la modification de la masse dans l'état  $E_1$ . Les fréquences repérées sont données dans le tableau (6.1) ainsi que la variation des fréquences  $\Delta f_n = f_{ap} - f_{av}$  et la variation relative de celles-ci  $\frac{\Delta f_n}{f_n} = \frac{f_{ap} - f_{av}}{f_{av}}$ . De ce tableau nous remarquons tout d'abord que les fréquences calculées par la TO sont très proches des fréquences théoriques. De plus, il est utile de noter que toutes les valeurs absolues de la variation relative des fréquences sont strictement inférieures à la valeur de la variation relative de la masse qui vaut  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,05$  à l'exception de la variation relative de la première fréquence. Nous reviendrons sur cette remarque dans le chapitre 8 sur l'évaluation de la variation de la masse.

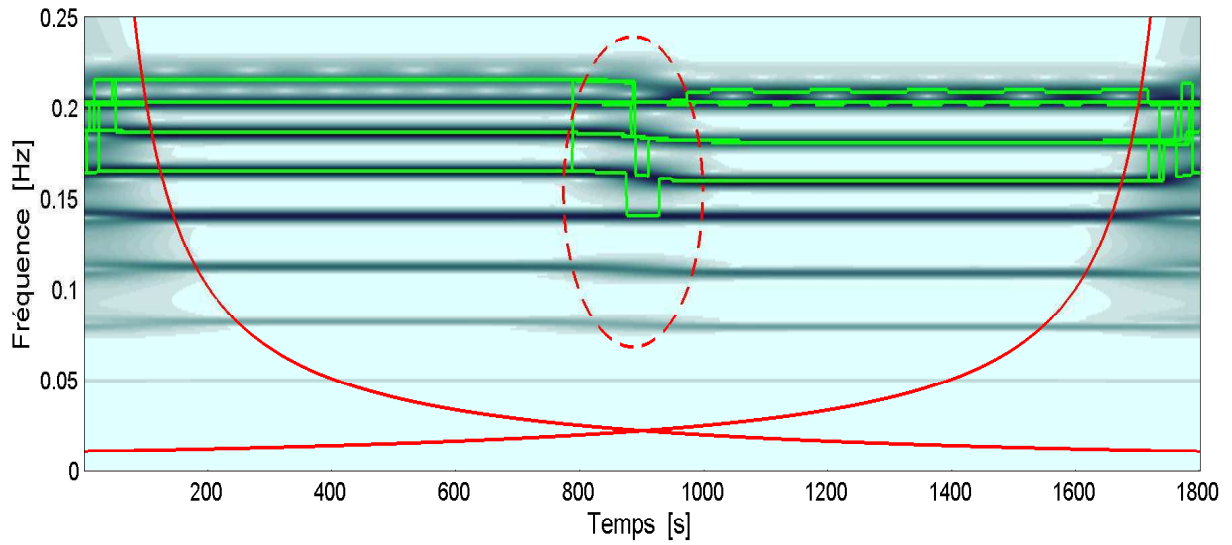


FIGURE 6.1. La TO des accélérations du système ayant subi une augmentation de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation.

Notons ici qu'il est possible, grâce à l'intervalle de temps récupéré pour l'état transitoire  $E_T = [800; 950]$  s d'évaluer une valeur approchée  $\tilde{t}_1$  de l'instant  $t_1$  de l'augmentation de la masse :

$$\tilde{t}_1 = \frac{800 + 950}{2} = 875 \text{ s} \quad (6.2)$$

avec une incertitude de  $\frac{950 - 800}{2} = 75 \text{ s}$ . Nous déduisons que  $t_1$  doit être de l'ordre de  $t_1 = \tilde{t}_1 \pm 75$  secondes.



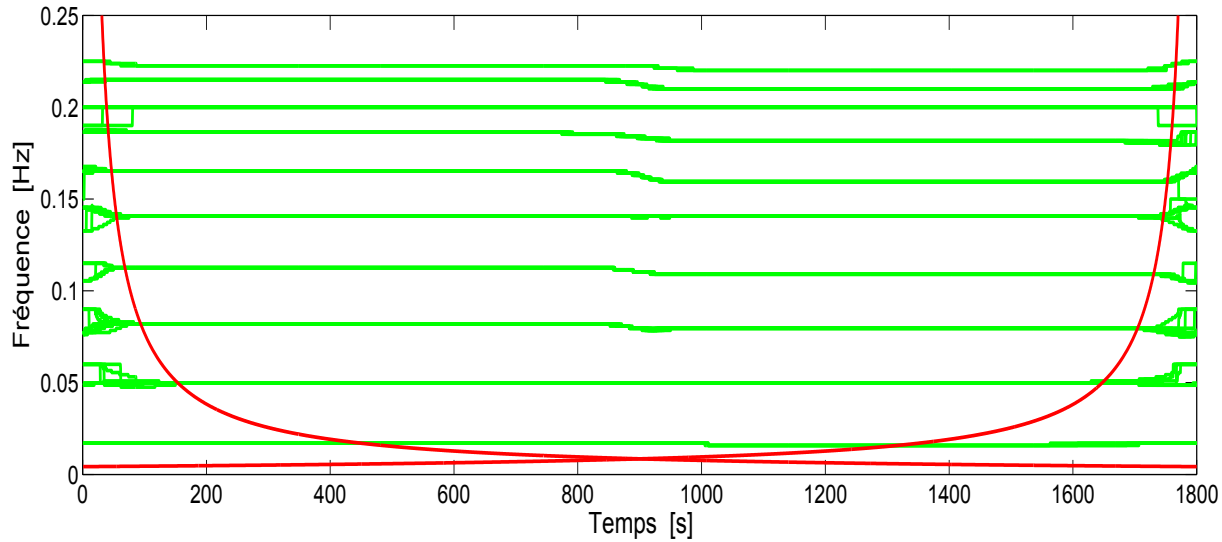


FIGURE 6.2. La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une augmentation de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation.

Test 1	Avant	Après	$\Delta f_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}$
$f_1$	0,0170	0,0157	-0,0012	-0,0706
$f_2$	0,0497	0,0497	0	0
$f_3$	0,0819	0,0796	-0,0023	-0,0281
$f_4$	0,1126	0,1090	-0,0036	-0,0320
$f_5$	0,1408	0,1408	0	0
$f_6$	0,1653	0,1594	-0,0059	-0,0570
$f_7$	0,1865	0,1818	-0,0047	-0,0252
$f_8$	0,2000	0,2000	0	0
$f_9$	0,2150	0,2100	-0,0050	-0,0233
$f_{10}$	0,2225	0,2200	-0,0025	-0,0112

TABLEAU 6.1. Les fréquences en Hz obtenues par la TO avant et après une augmentation de masse de  $\Delta m = 1 \text{ kg}$  tel que  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,05$ .

### Test 2 : deux augmentations de 60%

Dans un deuxième test numérique, nous nous posons face au même système initial mais qui après 10 minutes (600 secondes), subit une augmentation sur deux masses en même temps. Cette augmentation concerne les masses 4 et 7 et vaut 60 % de la masse locale de chacune (de 6 % de la masse totale du système). Les fréquences théoriques en Hz après ces augmentations de masses

sont données dans le vecteur  $F_{th}^{ap}$  par :

$$F_{th}^{ap} = \begin{pmatrix} 0,0159 \\ 0,0475 \\ 0,0784 \\ 0,1045 \\ 0,1361 \\ 0,1581 \\ 0,1720 \\ 0,2011 \\ 0,2085 \\ 0,2122 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

La figure (6.3) résulte de l'application de la TO au signal de ce système pour  $Q = 50$ . De plus, la figure (6.4) schématise les fréquences calculées par la TO fréquence par fréquence. Pour cette application de la TO sur dix bandes de fréquences, dix facteurs  $Q$  sont choisis :  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 13$ ,  $Q_3 = 10$ ,  $Q_4 = 15$ ,  $Q_5 = Q_6 = 20$  et  $Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 50$ . Nous détectons ainsi visuellement qu'il s'agit d'une augmentation de la masse dans l'intervalle de temps entouré par la ligne en rouge pointillée. Nous sommes capables de préciser les trois périodes :

- $E_0 = [105; 520]$  s : le système est dans l'état initial,
- $E_T = [520; 700]$  s : l'état transitoire lors de l'augmentation de la masse totale du système,
- $E_1 = [700; 1660]$  s : un nouvel état du système.

Grâce à l'intervalle de temps de l'état transitoire détecté  $E_T = [520; 700]$  s, nous cherchons l'instant  $\tilde{t}_1$  approchant  $t_1$  lorsque l'augmentation de deux masses est effectuée en même temps :

$$\tilde{t}_1 = \frac{520 + 700}{2} = 610 \text{ s} \quad (6.4)$$

Avec une incertitude de  $\frac{700 - 520}{2} = 90$  s, l'instant  $t_1$  doit être de l'ordre de  $t_1 = \tilde{t}_1 \pm 90$  secondes.

Nous présentons dans le tableau (6.2) les fréquences calculées par la TO avant et après ces modifications de la masse ainsi que la différence entre elles et leur variation relative. Nous déduisons des résultats de ce tableau que toutes les valeurs absolues des variations relatives des fréquences sont strictement inférieures à la variation relative de la masse  $\frac{\Delta m}{m_T} = \frac{2 \times 1.2}{20} = 0,12$ .

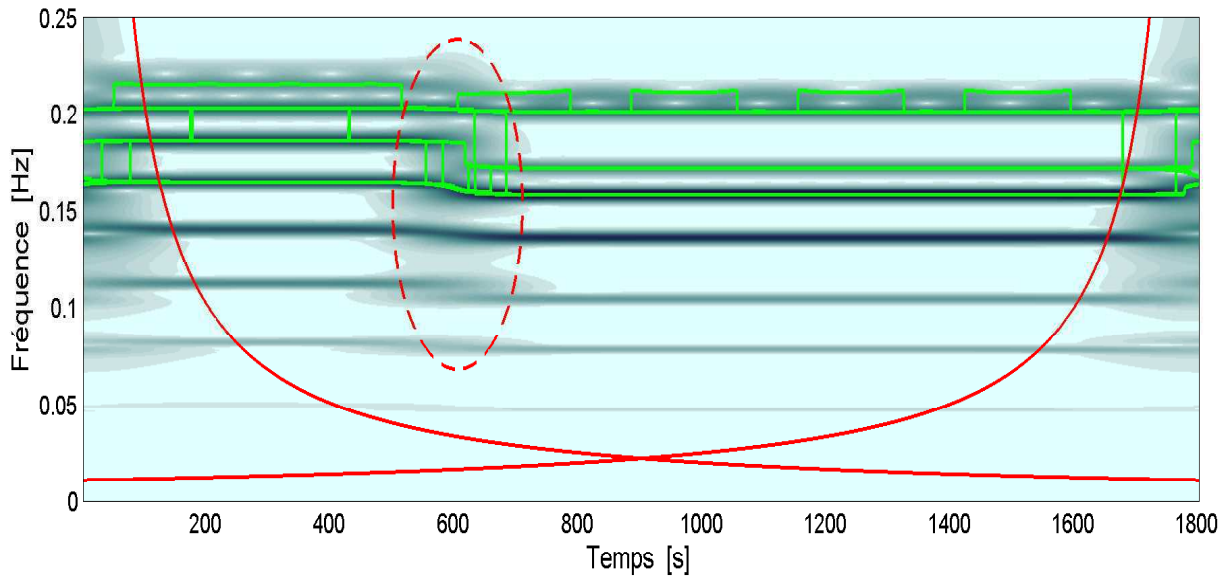


FIGURE 6.3. La TO des accélérations du système ayant subi une augmentation de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation.

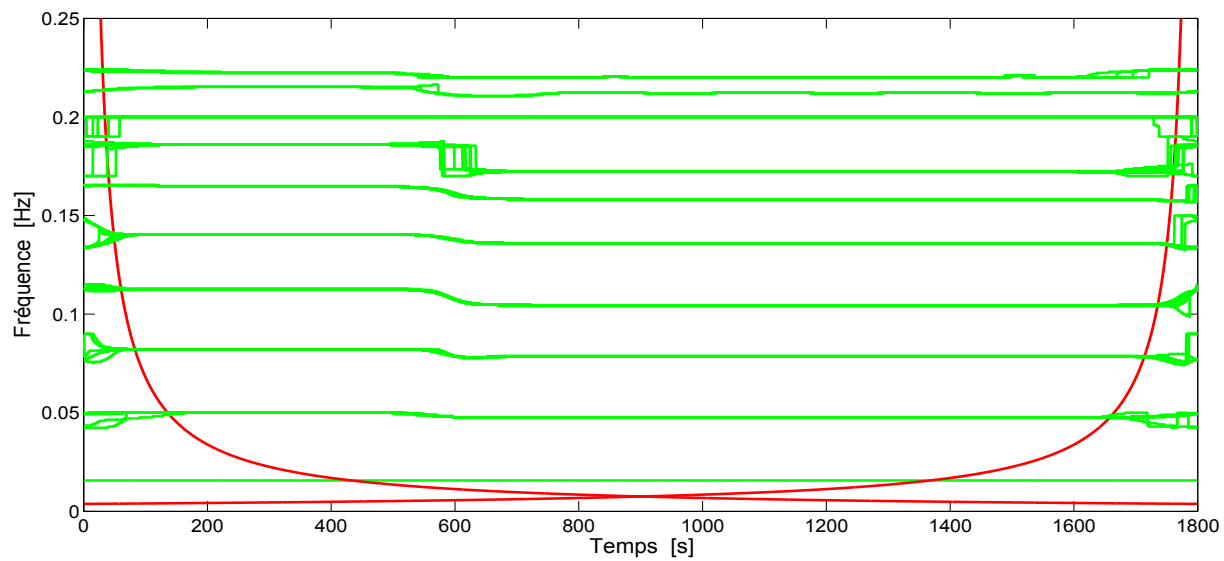


FIGURE 6.4. La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une augmentation de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation.

Test 2	Avant	Après	$\Delta f_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}$
$f_1$	0,0152	0,0158	-0,0005	-0,0387
$f_2$	0,0498	0,0476	-0,0022	-0,0450
$f_3$	0,0820	0,0786	-0,0034	-0,0414
$f_4$	0,1127	0,1042	-0,0085	-0,0750
$f_5$	0,1404	0,1358	-0,0046	-0,0327
$f_6$	0,1649	0,1580	-0,0059	-0,0357
$f_7$	0,1860	0,1723	-0,0069	-0,0370
$f_8$	0,2000	0,2000	0	0
$f_9$	0,2153	0,2100	-0,0053	-0,0246
$f_{10}$	0,2224	0,2200	-0,0024	-0,0107

TABLEAU 6.2. Les fréquences en  $Hz$  obtenues par la TO avant et après une augmentation de deux masses, en un même instant, de  $\Delta m = 2 \times 1,2 = 2,4$  kg tel que  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,12$ .

### Test 3 : deux augmentations consécutives de 30% et 60%

Maintenant, nous choisissons d'étudier ce même système, mais cette fois nous considérons des augmentations de deux masses, chacune à un instant différent. Soit le système qui subit une augmentation de la masse locale 4 de 30 % après 10 minutes (600 secondes) puis une deuxième augmentation de la masse locale 7 de 60 % après 20 minutes (1200 secondes) du début du temps d'observation. Soit au total une augmentation de 9 % de la masse totale du système en deux instants différents. Les fréquences initiales du système étant toujours les mêmes, nous présentons les fréquences théoriques en  $Hz$  après la première augmentation de la masse par le vecteur  $F_{th}^{ap1}$  et celles après la deuxième augmentation de la masse par le vecteur  $F_{th}^{ap2}$  :

$$F_{th}^{ap1} = \begin{pmatrix} 0,0167 \\ 0,0488 \\ 0,0822 \\ 0,1101 \\ 0,1381 \\ 0,1646 \\ 0,1812 \\ 0,2019 \\ 0,2125 \\ 0,2200 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{th}^{ap2} = \begin{pmatrix} 0,0160 \\ 0,0488 \\ 0,0786 \\ 0,1064 \\ 0,1380 \\ 0,1581 \\ 0,1757 \\ 0,2018 \\ 0,2085 \\ 0,2145 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

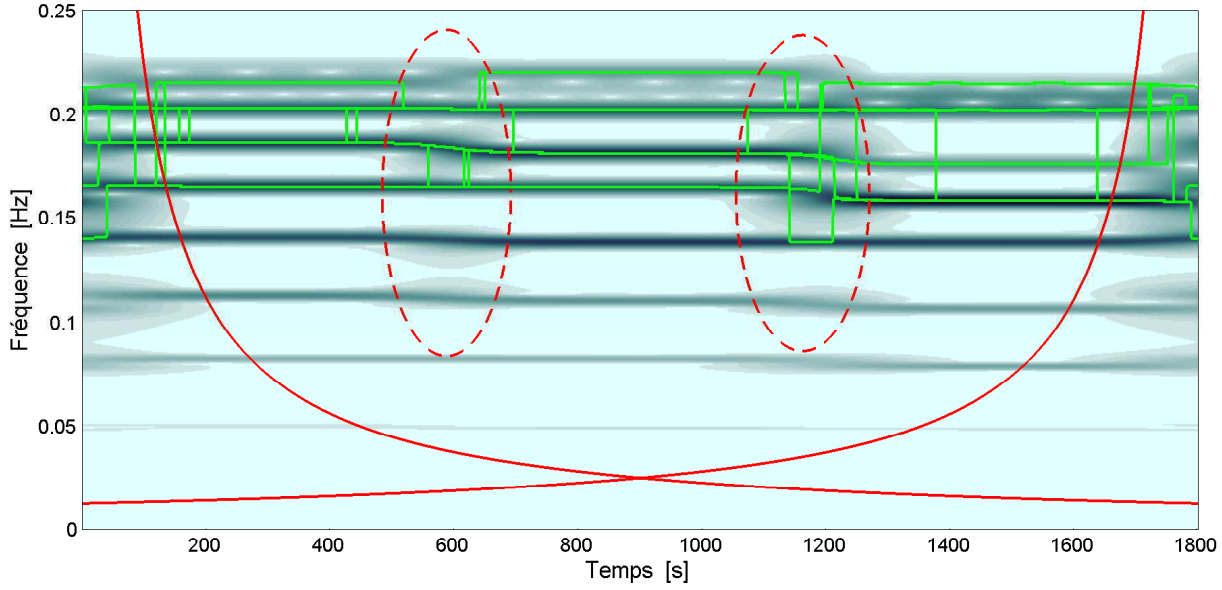


FIGURE 6.5. La TO des accélérations du système ayant subi une augmentation de masse après 10 minutes (600 secondes) puis une deuxième augmentation de masse après 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation.

Nous observons les résultats obtenus par la TO pour  $Q = 55$  dans la figure (6.5). L'intervalle en temps de l'état initial, des états transitoires et des états après chaque modification de masse sont ainsi définis par :

- $E_0 = [150; 500]$  s : l'état initial du système,
- $E_{T_1} = [500; 660]$  s : le premier état transitoire lors de la première augmentation de la masse du système,
- $E_1 = [660; 1100]$  s : un nouvel état après la première augmentation de la masse initiale du système,
- $E_{T_2} = [1100; 1200]$  s : le deuxième état transitoire lors de la seconde augmentation de la masse du système,
- $E_2 = [1200; 1680]$  s : un nouvel état après la deuxième augmentation de la masse initiale du système.

Cherchons à partir des états transitoires  $E_{T_1}$  et  $E_{T_2}$  les valeurs  $\tilde{t}_1$  et  $\tilde{t}_2$  qui approchent les instants  $t_1$  et  $t_2$  lorsque les augmentations de masse ont été effectuées :

$$\tilde{t}_1 = \frac{500 + 660}{2} = 580 \text{ s} \quad (6.6)$$

et,

$$\tilde{t}_2 = \frac{1100 + 1200}{2} = 1150 \text{ s} \quad (6.7)$$

L'incertitude de  $\tilde{t}_1$  est de  $\frac{660 - 500}{2} = 80$  s et celle de  $\tilde{t}_2$  est de  $\frac{1200 - 1100}{2} = 50$  s. Nous déduisons que l'instant  $t_1$  est proche de  $\tilde{t}_1 \pm 80$  secondes et que l'instant  $t_2$  est proche de  $\tilde{t}_2 \pm 50$  secondes.

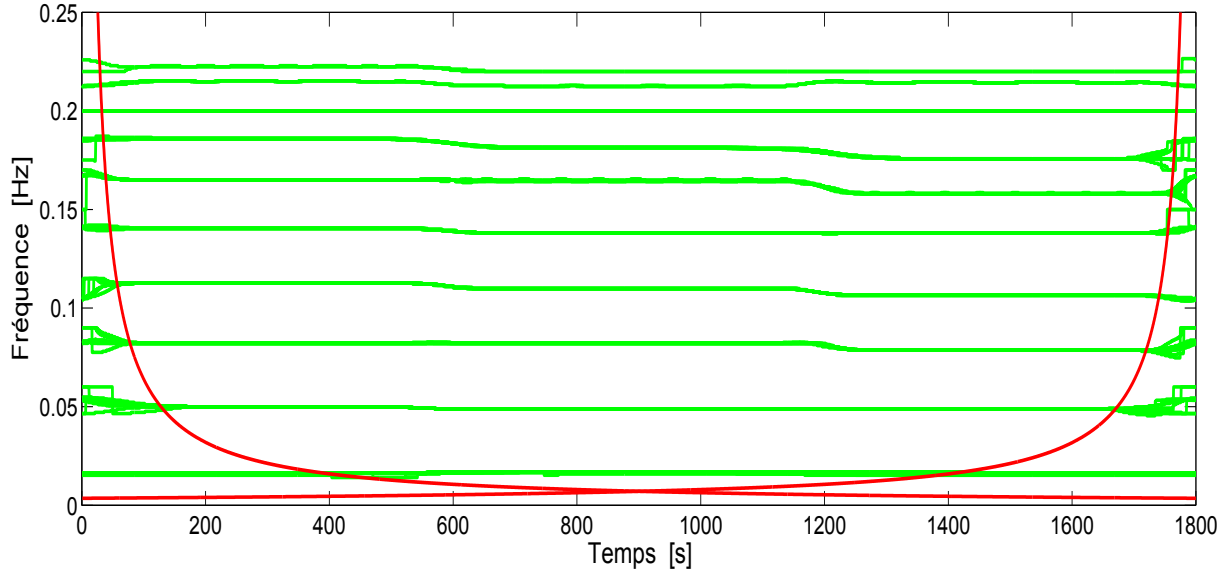


FIGURE 6.6. La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi des augmentations de deux masses après 10 minutes (600 secondes) puis après 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation.

Comme il est remarquable dans la figure (6.5) les fréquences tracées en vert ne sont pas bien espacées et il est difficile de récupérer les dix fréquences du système. Pour cela, et comme pour les autres tests, nous calculons chaque fréquence à part par la TO en se limitant à une bande de fréquence à chaque calcul. Après regroupement des fréquences calculées par la TO, celles-ci sont présentées dans la figure (6.6). Les valeurs de  $Q$  choisies pour chaque application de la TO sont données par :  $Q_1 = 40$ ,  $Q_2 = 13$ ,  $Q_3 = 10$ ,  $Q_4 = 15$ ,  $Q_5 = Q_6 = 20$  et  $Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 50$ .

À partir de la figure (6.6) nous retirons trois vecteurs de fréquences : le premier est le vecteur des fréquences initiales du système à l'état  $E_0$ , le deuxième est le vecteur des fréquences après la première augmentation de la masse à l'état  $E_1$  et le troisième est le vecteur des fréquences après la deuxième augmentation de la masse à l'état  $E_2$ . Ces trois vecteurs sont présentés dans le tableau (6.3) par "Avant", "Après<sub>1</sub>" et "Après<sub>2</sub>" respectivement. En considérant après chaque modification de masse que l'état actuel est un nouvel état initial, nous calculons les deux vecteurs

$$(\Delta f_n)_1 = \text{Après}_1 - \text{Avant} \quad (6.8)$$

et

$$(\Delta f_n)_2 = \text{Après}_2 - \text{Après}_1 \quad (6.9)$$

ainsi que les deux vecteurs des variations relatives des fréquences

$$\left( \frac{\Delta f_n}{f_n} \right)_1 = \frac{(\Delta f_n)_1}{\text{Avant}} \quad (6.10)$$

et

$$\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_2 = \frac{(\Delta f_n)_2}{\text{Après}_1}. \quad (6.11)$$

Test 3	Avant	Après <sub>1</sub>	Après <sub>2</sub>	$(\Delta f_n)_1$	$(\Delta f_n)_2$	$\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_1$	$\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_2$
$f_1$	0,0164	0,0164	0,0158	0	-0,0005	0	-0,0353
$f_2$	0,0498	0,0487	0,0487	-0,0011	0	-0,0226	0
$f_3$	0,0820	0,0820	0,0786	0	-0,0034	0	-0,0414
$f_4$	0,1127	0,1099	0,1065	-0,0028	-0,0034	-0,0248	-0,0309
$f_5$	0,1404	0,1381	0,1381	-0,0023	0	-0,0163	0
$f_6$	0,1649	0,1643	0,1580	-0,0006	-0,0063	-0,0036	-0,0383
$f_7$	0,1860	0,1814	0,1757	-0,0046	-0,0057	-0,0247	-0,0314
$f_8$	0,2000	0,2000	0,2000	0	0	0	0
$f_9$	0,2153	0,2124	0,2100	-0,0029	-0,0024	-0,0134	-0,0113
$f_{10}$	0,2224	0,2200	0,2147	-0,0024	-0,0053	-0,0107	-0,0240

TABLEAU 6.3. Les fréquences en Hz obtenues par la TO avant et après deux augmentations de masse, en deux instants différents, de la masse  $\Delta m_1 = 0,6$  kg tel que  $\frac{\Delta m_1}{m_T} = 0,03$  puis de la masse  $\Delta m_2 = 1,2$  kg tel que  $\frac{\Delta m_2}{m_T} = 0,06$ .

D'après les valeurs du tableau (6.3), nous déduisons que la valeur absolue des variations relatives des fréquences  $\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_1$  et  $\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_2$  sont plus petites que les variations relatives  $\frac{\Delta m_1}{m_T}$  et  $\frac{\Delta m_2}{m_T}$  respectivement. Nous reviendrons sur cette remarque dans le chapitre 8.

L'application de la TO pour des exemples numériques après différentes augmentations de masse s'avère fiable pour la détection des instants auxquels des modifications de la masse sont effectuées. Ces instants sont récupérables grâce aux intervalles de temps délimitant les états transitoires. Examinons dans le paragraphe suivant l'efficacité de la TO suite à des diminutions des masses locales du système.

### 6.2.2 Diminutions des masses locales d'un système

Toujours dans le même contexte du système dynamique non amorti à 10 d.d.l et à matrice de masse homogène dont la masse totale est de 20 kg, nous testons différents cas d'endommagement de la masse. Nous suivons dans ce paragraphe les mêmes hypothèses décrites dans le paragraphe précédent mais en effectuant des diminutions de masses. Ainsi, nous décrivons dans ce paragraphe trois tests. Un premier test (test 4) est présenté concernant une diminution de la masse en un instant au cours du temps d'observation. Un deuxième test (test 5) est étudié après la diminution de deux masses locales en un même instant. Un dernier test (test 6) est effectué après deux différentes

diminutions de masse à deux instants différents. Notre but sera donc de détecter l'instant ou les instants auxquels les diminutions de la masse ont eu lieu en étudiant les augmentations des fréquences.

Dans ce paragraphe, trois tests sont présentés pour la recherche du moment de la ou des diminutions de masses locales du système :

Test 4 : une diminution de 50%

Test 5 : deux diminutions de 60%

Test 6 : deux diminutions consécutives de 40% et 60%

Examinons les résultats obtenus par la TO suite aux diminutions de masses effectuées pour ces trois tests.

#### Test 4 : une diminution de 50%

Nous présentons tout d'abord un système ayant subi une diminution de  $-50\%$  de la masse locale sur la 7<sup>ème</sup> masse après 15 minutes (900 secondes) d'observation. Les fréquences théoriques en  $Hz$  après cette diminution de masse sont telles que :

$$F_{th}^{ap} = \begin{pmatrix} 0,0159 \\ 0,0475 \\ 0,0784 \\ 0,1045 \\ 0,1361 \\ 0,1581 \\ 0,1720 \\ 0,2011 \\ 0,2085 \\ 0,2122 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Les résultats obtenus par la TO en choisissant  $Q = 50$  sont schématisés dans la figure (6.7). Les états récupérés désignant les différents états du système en fonction du temps sont :

- $E_0 = [110; 800] s$  : l'état initial du système,
- $E_T = [800; 1000] s$  : l'état transitoire lors de la diminution de la masse du système,
- $E_1 = [1000; 1700] s$  : un nouvel état du système.

Pour détecter l'instant  $t_1$  de cette diminution de la masse, nous utilisons l'intervalle de temps à l'état transitoire  $E_T = [800; 1000] s$  et nous calculons tout d'abord  $\tilde{t}_1$  :

$$\tilde{t}_1 = \frac{800 + 1000}{2} = 900 s \quad (6.13)$$

Par conséquent, ayant une incertitude de  $\frac{1000 - 800}{2} = 100 s$ , l'instant  $t_1$  détecté grâce à l'augmentation des fréquences est approché par  $\tilde{t}_1 \pm 100$  secondes.

Afin de pouvoir récupérer les dix fréquences calculées par la TO, nous présentons dans la figure (6.8) les résultats de l'étude de chaque fréquence. Chacune des dix valeurs de  $Q$  est donnée par :  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 13$ ,  $Q_3 = 10$ ,  $Q_4 = 15$ ,  $Q_5 = Q_6 = 20$  et  $Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 50$ .



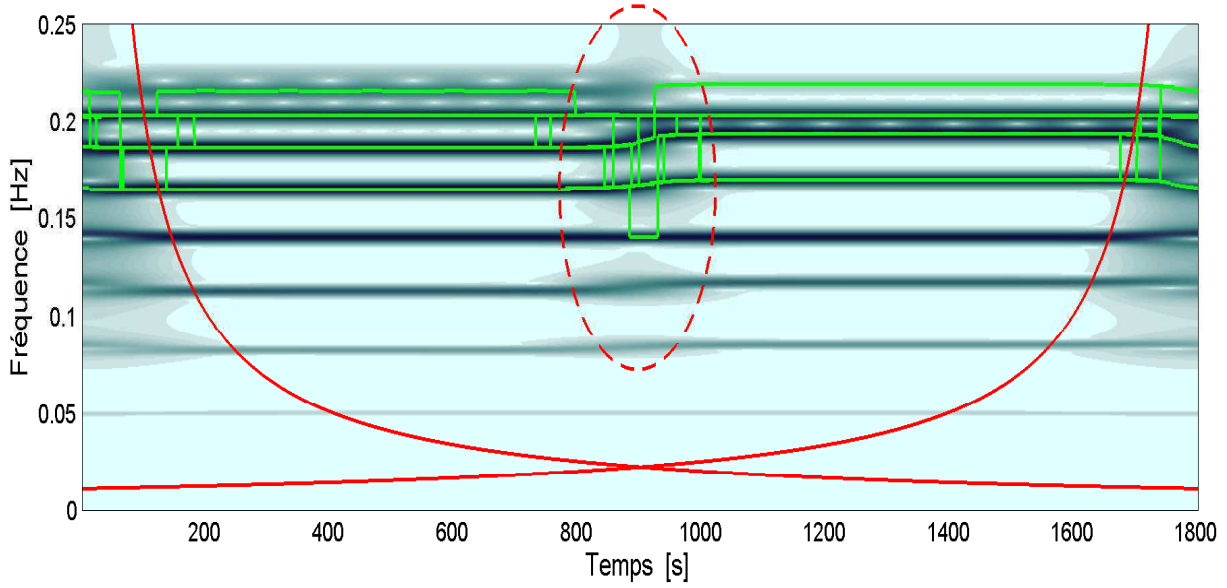


FIGURE 6.7. La TO des accélérations du système ayant subi une diminution de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation.

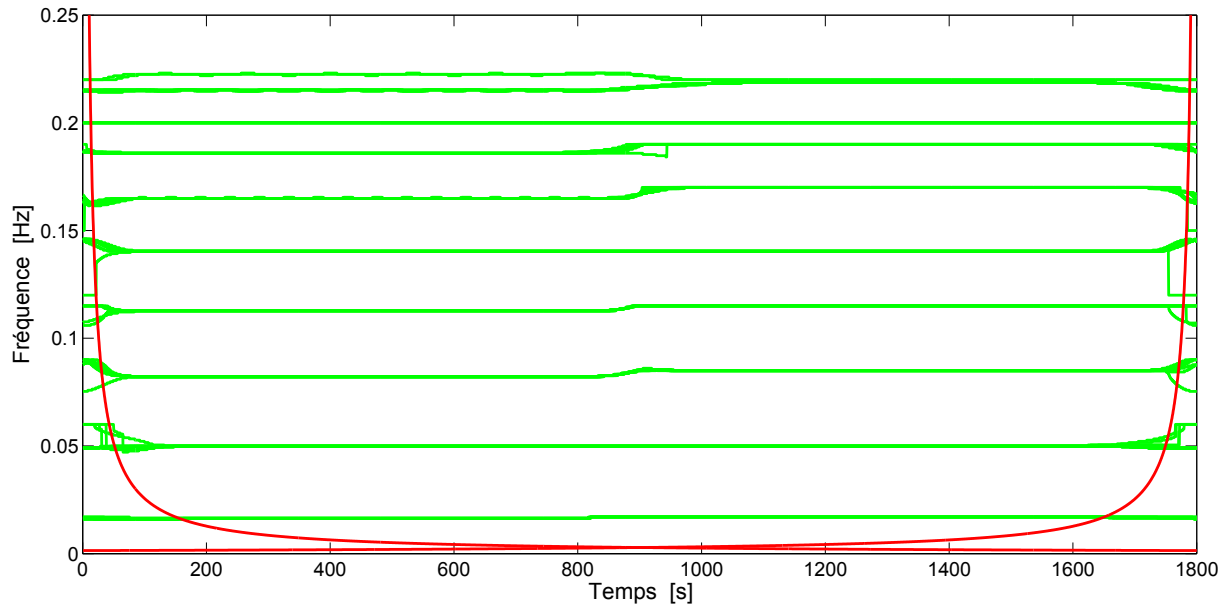


FIGURE 6.8. La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une diminution de masse après 15 minutes (900 secondes) du début de l'observation.

De cette figure nous récupérons les dix fréquences en  $Hz$  avant et les dix autres après cette diminution de la masse. On les représente dans le tableau (6.4). Dans ce tableau nous calculons le vecteur  $\Delta f_n$  qui est la différence entre les fréquences avant et les fréquences après la modification de masse ainsi que le vecteur  $\frac{\Delta f_n}{f_n}$  qui représente la variation relative des fréquences. Sachant que

la variation relative de la masse vaut :

$$\frac{\Delta m}{m_T} = \frac{1}{20} = 0,05 \quad (6.14)$$

nous déduisons du tableau (6.4) que toutes les variations relatives des fréquences sont strictement inférieures à la variation relative de la masse à l'exception de la dixième variation. Malgré ceci, la valeur absolue de cette variation relative de fréquences est strictement inférieure à la variation relative de la masse. Cette déduction est très importante dans la quantification de la variation relative de la masse. Nous développons en détails cette relation entre la variation relative des fréquences et celle de la masse dans le chapitre 8.

Test 4	Avant	Après	$\Delta f_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}$
$f_1$	0,0164	0,0170	0,0005	0,0359
$f_2$	0,0498	0,0498	0	0
$f_3$	0,0820	0,0849	0,0028	0,0344
$f_4$	0,1127	0,1150	0,0023	0,0204
$f_5$	0,1404	0,1404	0	0
$f_6$	0,1649	0,1700	0,0051	0,0309
$f_7$	0,1860	0,1929	0,0069	0,0370
$f_8$	0,2000	0,2000	0	0
$f_9$	0,2153	0,2200	0,0047	0,0218
$f_{10}$	0,2224	0,2200	-0,0024	-0,0107

TABLEAU 6.4. Les fréquences en Hz obtenues par la TO avant et après une diminution de masse de  $\Delta m = 1$  kg tel que  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,05$ .

### Test 5 : deux diminutions de 60%

Nous cherchons dans ce test (figure (6.9)) à observer le système ayant subi une diminution de 60 % des masses 4 et 7 après 10 minutes d'observation, ce qui vaut 6 % de la masse totale du système.

Les fréquences théoriques de ce système après ces deux diminutions de masses sont données par :

$$F_{th}^{ap} = \begin{pmatrix} 0,0179 \\ 0,0530 \\ 0,0856 \\ 0,1224 \\ 0,1458 \\ 0,1744 \\ 0,1983 \\ 0,2051 \\ 0,2787 \\ 0,2837 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

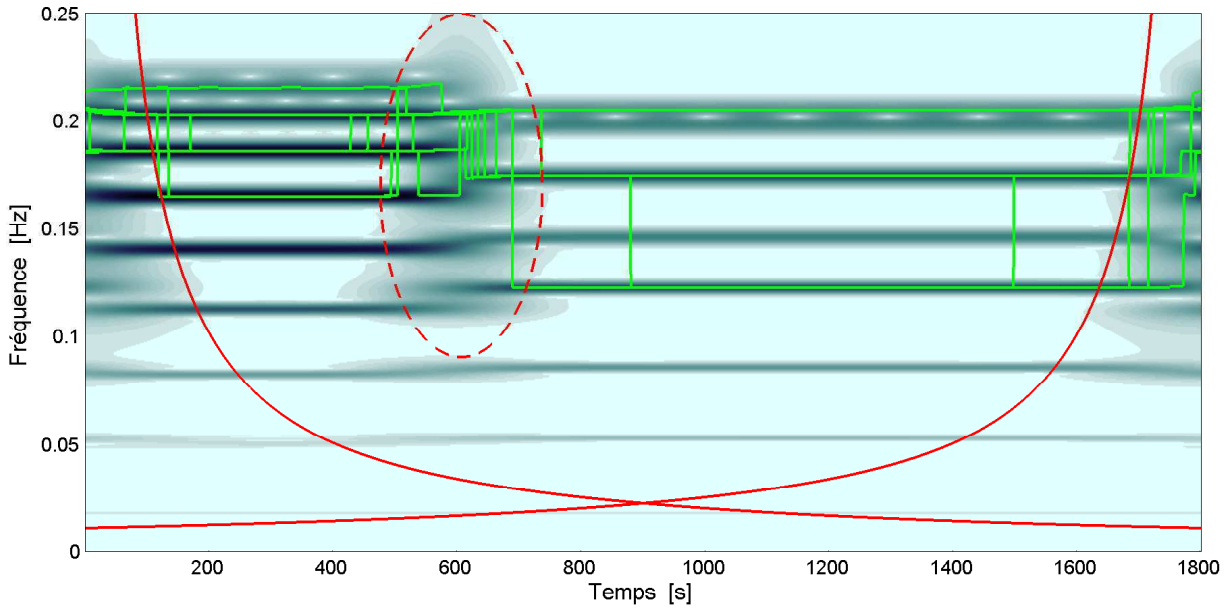


FIGURE 6.9. La TO des accélérations du système ayant subi une diminution de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation.

Le facteur  $Q$  choisi pour l'application de la TO dans ce cas vaut 50. Pour savoir à chaque instant  $t_i$  l'état du système, nous décomposons le temps d'observation en trois états grâce à la variation des fréquences et aux effets de bords :

- $E_0 = [150; 500]$  s : l'état initial du système,
- $E_T = [500; 700]$  s : l'état transitoire lors de la diminution de deux masses du système,
- $E_1 = [700; 1700]$  s : un nouvel état après la diminution de deux masses du système.

Nous approchons l'instant  $t_1$  de la diminution simultanée de deux masses à partir de l'intervalle de temps de l'état stationnaire  $E_T = [500; 700]$  s par :

$$\tilde{t}_1 = \frac{500 + 700}{2} = 600 \text{ s} \quad (6.16)$$

avec une incertitude de  $\frac{700 - 500}{2} = 100$  s. Nous déduisons que l'instant  $t_1$  doit être proche de  $\tilde{t}_1 \pm 100$  secondes.

Nous récupérons les dix fréquences calculées par la TO sur dix différentes bandes de fréquences en choisissant  $Q$  :  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 13$ ,  $Q_3 = 10$ ,  $Q_4 = 15$ ,  $Q_5 = Q_6 = 20$ ,  $Q_7 = 30$  et  $Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 50$ . Ces fréquences sont présentées dans la figure (6.10).

Test 5	Avant	Après	$\Delta f_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}$
$f_1$	0,0170	0,0170	0	0
$f_2$	0,0498	0,0532	0,0033	0,0067
$f_3$	0,0820	0,0854	0,0033	0,0413
$f_4$	0,1127	0,1150	0,0023	0,0204
$f_5$	0,1404	0,1460	0,0056	0,0398
$f_6$	0,1649	0,1700	0,0051	0,0309
$f_7$	0,1860	0,1900	0,0040	0,0215
$f_8$	0,2000	0,2000	0	0
$f_9$	0,2153	0,2200	0,0047	0,0218
$f_{10}$	0,2224	0,2200	-0,0024	-0,0107

TABLEAU 6.5. Les fréquences en Hz obtenues par la TO avant et après la diminution simultanée de deux masses de  $\Delta m = 1,2$  kg tel que  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,06$ .

Dans le tableau (6.5) nous présentons les dix fréquences avant et les dix autres après la diminution de ces masses. Dans ce tableau nous calculons le vecteur  $\Delta f_n$  qui est la différence entre les fréquences avant et les fréquences après ainsi que le vecteur  $\frac{\Delta f_n}{f_n}$  qui représente la variation relative des fréquences, sachant que la variation relative de la masse vaut  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,06$ . Ainsi, nous remarquons que toutes les variations relatives des fréquences sont strictement inférieures à la variation relative de la masse. Notons que la dixième fréquence après la diminution de la masse diminue. Malgré ceci, la valeur absolue de la variation relative de cette fréquence est strictement inférieure à la variation relative de la masse.

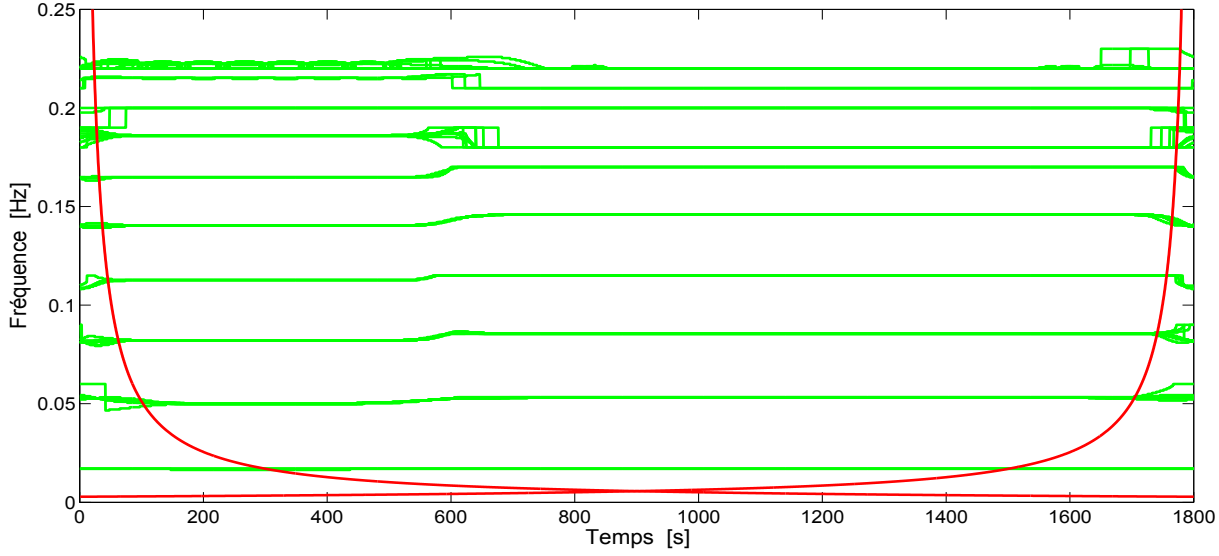


FIGURE 6.10. La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi une diminution de deux masses après 10 minutes (600 secondes) du début de l'observation.

#### Test 6 : deux diminutions consécutives de 40% et 60%

Pour le dernier test présenté dans ce paragraphe, nous nous inspirons du test 3 du paragraphe 6.2.1 en supposant que le système subit deux diminutions de masses à deux instants différents. En effet, ce test est plus intéressant et plus proche des cas rencontrés en réalité, puisque la plupart des structures perdent leur masse au cours du temps. Nous cherchons ainsi à récupérer les différents instants des diminutions de masse grâce à l'intervalle de temps de chaque état transitoire. Pour cela, nous supposons que le système a subi une diminution de 40 % de sa masse locale 4 donc de 4 % de la masse totale après 10 minutes (600 s), puis une seconde diminution de 60 % de la masse 7 qui vaut 6 % de la masse totale après 20 minutes (1200 s). Les fréquences théoriques, en  $Hz$ , du système après la première diminution de masse  $F_{th}^{ap1}$  et celles après la deuxième diminution de masse  $F_{th}^{ap2}$  sont données par :

$$F_{th}^{ap1} = \begin{pmatrix} 0,0170 \\ 0,0520 \\ 0,0823 \\ 0,1156 \\ 0,1438 \\ 0,1655 \\ 0,1924 \\ 0,2043 \\ 0,2174 \\ 0,2455 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{th}^{ap2} = \begin{pmatrix} 0,0178 \\ 0,0520 \\ 0,0856 \\ 0,1211 \\ 0,1440 \\ 0,1732 \\ 0,1974 \\ 0,2044 \\ 0,2446 \\ 0,2814 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Nous observons les résultats de la TO pour  $Q = 55$  dans la figure (6.11). Nous récupérons les états suivants :

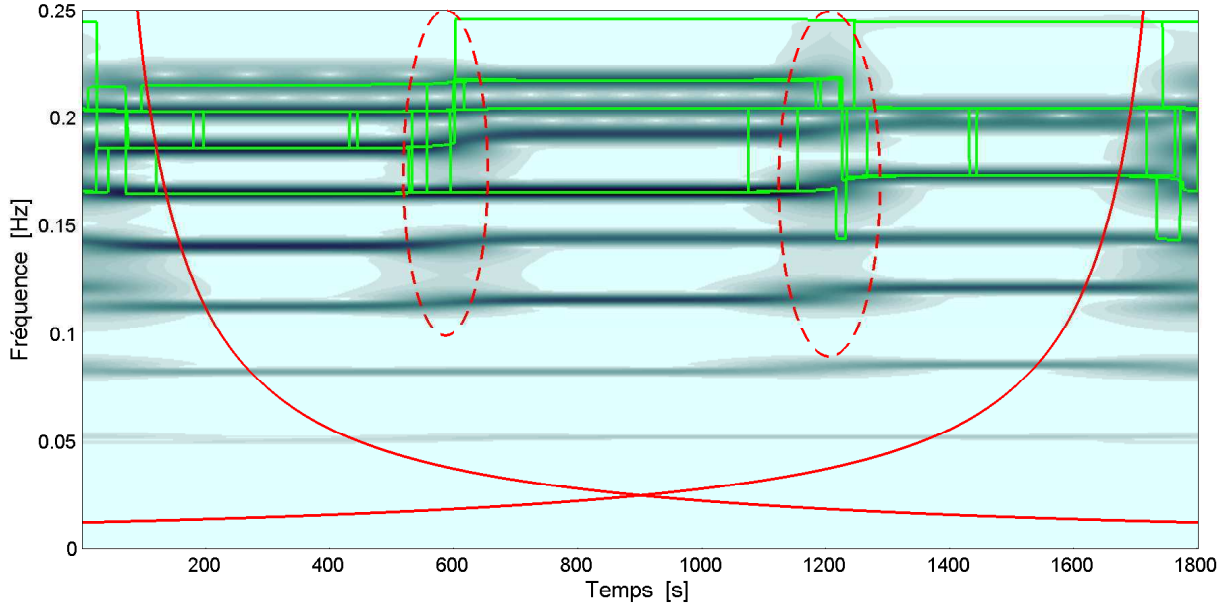


FIGURE 6.11. La TO des accélérations du système ayant subi deux diminutions successives de masse : la première après 10 minutes (600 secondes) et la deuxième après 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation.

- $E_0 = [110; 500]$  s : l'état initial du système,
- $E_{T_1} = [500; 650]$  s : le premier état transitoire du système,
- $E_1 = [650; 1110]$  s : un nouvel état après la première diminution de la masse initiale du système,
- $E_{T_2} = [1110; 1250]$  s : le deuxième état transitoire du système,
- $E_2 = [1250; 1700]$  s : un nouvel état après la deuxième diminution de la masse initiale du système.

Pour plus de précision sur les dix fréquences calculées en  $Hz$  et leur comportement, nous appliquons la TO sur dix différentes bandes de fréquences en choisissant :  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 13$ ,  $Q_3 = 10$ ,  $Q_4 = 15$ ,  $Q_5 = Q_6 = 20$ ,  $Q_7 = Q_8 = Q_9 = 50$  et  $Q_{10} = 100$ . Les résultats obtenus sont schématisés dans la figure (6.12).

Cherchons à partir des états transitoires  $E_{T_1}$  et  $E_{T_2}$  les valeurs  $\tilde{t}_1$  et  $\tilde{t}_2$  :

$$\tilde{t}_1 = \frac{500 + 650}{2} = 575 \text{ s} \quad (6.18)$$

et,

$$\tilde{t}_2 = \frac{1110 + 1250}{2} = 1180 \text{ s} \quad (6.19)$$

Ainsi, l'instant  $t_1$  est calculé à une incertitude près de  $\frac{650 - 500}{2} = 75$  s et donc doit être environ  $\tilde{t}_1 \pm 75$  secondes. De même, l'instant  $t_2$  est calculé à une incertitude près de  $\frac{1250 - 1110}{2} = 70$  s et donc doit être environ  $\tilde{t}_2 \pm 70$  secondes.

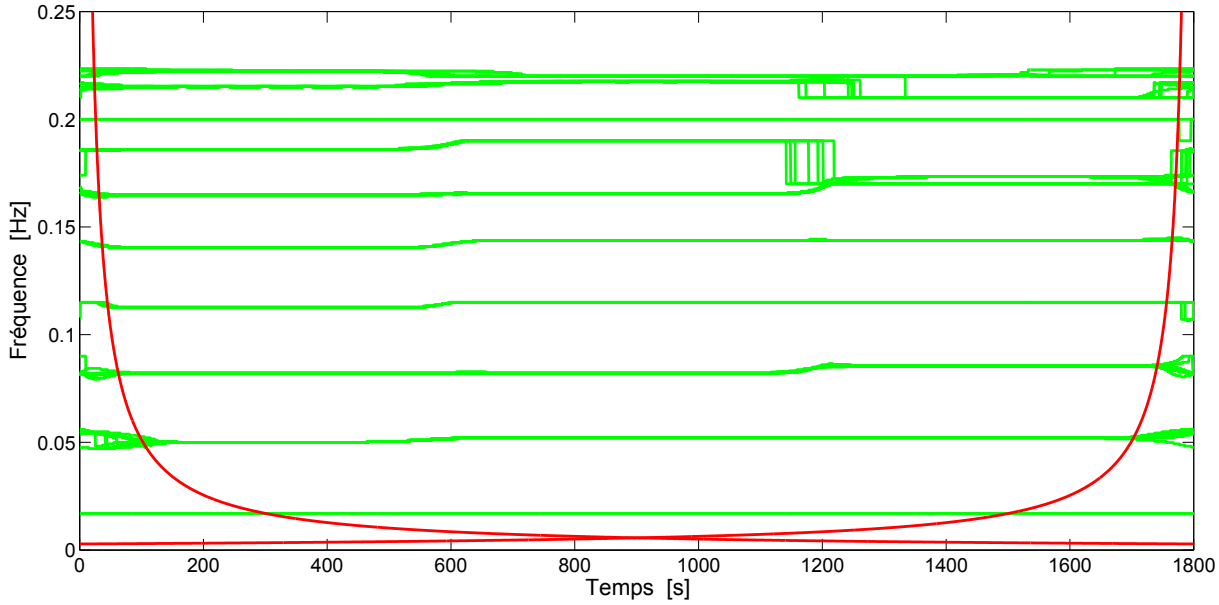


FIGURE 6.12. La TO, sur dix bandes de fréquences, des accélérations du système ayant subi deux diminutions de masses après 10 minutes (600 secondes) puis 20 minutes (1200 secondes) du début de l'observation.

De la figure (6.12) nous tirons les dix fréquences calculées en  $Hz$  par la TO à l'état initial  $E_0$  du système. Dix autres fréquences sont récupérées après la première diminution de la masse au cours de l'intervalle de temps du premier état transitoire  $E_{T_1}$ . Enfin nous trouvons dix fréquences, calculées par la TO, après la deuxième diminution de la masse dans l'état transitoire  $E_{T_2}$ . Toutes les fréquences calculées en  $Hz$  par la TO sont présentées dans le tableau (6.6) par les trois vecteurs "Avant", "Après<sub>1</sub>" et "Après<sub>2</sub>". Nous calculons grâce à ces trois vecteurs de fréquences les deux vecteurs  $(\Delta f_n)_1 = \text{Après}_1 - \text{Avant}$  et  $(\Delta f_n)_2 = \text{Après}_2 - \text{Après}_1$ , ainsi que les deux vecteurs des variations relatives des fréquences  $\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_1 = \frac{(\Delta f_n)_1}{\text{Avant}}$  et  $\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_2 = \frac{(\Delta f_n)_2}{\text{Après}_1}$ .

Nous déduisons des résultats des variations relatives des fréquences après la première diminution de masse que les valeurs  $\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_1$  sont toutes inférieures à la valeur de la variation relative de la masse qui vaut  $\frac{\Delta m_1}{m_T} = 0,04$  à l'exception de la deuxième variation relative des fréquences. De même, celles du vecteur  $\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_2$  sont aussi inférieures à  $\frac{\Delta m_2}{m_T} = 0,06$  à l'exception de la valeur absolue de la septième variation relative des fréquences.

Test 6	Avant	Après <sub>1</sub>	Après <sub>2</sub>	$(\Delta f_n)_1$	$(\Delta f_n)_2$	$\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_1$	$\left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)_2$
$f_1$	0,0170	0,0170	0,0170	0	0	0	0
$f_2$	0,0498	0,0521	0,0521	0,0022	0	0,0448	0
$f_3$	0,0820	0,0820	0,0854	0	0,0033	0	0,0413
$f_4$	0,1127	0,1150	0,1150	0,0023	0	0,0204	0
$f_5$	0,1404	0,1438	0,1438	0,0034	0	0,0242	0
$f_6$	0,1649	0,1654	0,1700	0,0005	0,0046	0,0030	0,0278
$f_7$	0,1860	0,1900	0,1734	0,0040	-0,0166	0,0215	-0,0873
$f_8$	0,2000	0,2000	0,2000	0	0	0	0
$f_9$	0,2153	0,2176	0,2100	0,0023	-0,0076	0,0106	-0,0349
$f_{10}$	0,2224	0,2200	0,2300	-0,0024	0,0100	-0,0107	0,0454

TABLEAU 6.6. Les fréquences en Hz obtenues par la TO avant et après deux diminutions, en deux instants différents, de la masse  $\Delta m_1 = 0,6$  kg tel que  $\frac{\Delta m_1}{m_T} = 0,03$  et de la masse  $\Delta m_2 = 1,2$  kg tel que  $\frac{\Delta m_2}{m_T} = 0,06$ .

### 6.3 Conclusion

Pour résumer, nous avons testé numériquement l'application de la TO à plusieurs signaux d'accélération de différents cas d'un système dynamique linéaire discret non amorti. Il a aussi été montré que la TO est efficace dans la détection des instants de modification des masses au cours du temps, tant pour les augmentations que pour les diminutions de masses. Pour les six tests présentés dans ce chapitre, l'instant  $t_1$  de la modification de la masse est approché à une incertitude près. En effet, grâce à la variation des fréquences de la TO nous sommes capables de localiser l'instant  $t_1$  dans un intervalle de temps que nous avons noté  $E_T$ .

De plus, grâce aux fréquences calculées par la TO nous avons montré pour chaque test que la variation relative des fréquences est souvent inférieure à la variation relative de la masse. Malgré certaines exceptions, il est clair que la variation relative des fréquences nous donne des informations sur la variation relative de la masse. Notons ici que le calcul des fréquences en appliquant la TO sur différentes bandes de fréquences est précis mais aussi coûteux en temps de calcul.

Pour un système stationnaire, on peut se contenter de calculer les fréquences de vibration en utilisant la transformée de Fourier. Cette idée sera discutée et appliquée dans le chapitre 8 afin de chercher à quantifier la variation relative de la masse.

Une fois l'identification des périodes  $E_0$  et  $E_1$  effectuée, nous allons nous en servir dans la détection de la position de la modification de la masse dans le chapitre 7. Trois méthodes de détection de la position de la masse seront développées; cette détection de position consiste en l'étape 2 de notre étude.





## Chapitre 7

# Détection de la position de la modification de la masse

---

**L**E BUT DE CE CHAPITRE est de proposer trois méthodes pour la détection de la position du changement de la masse. Ces méthodes se basent sur la variation des vecteurs propres du système suite à une variation de masse. L'efficacité de ces méthodes sera vérifiée numériquement pour six cas différents.

---

## PLAN DU CHAPITRE 7

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>85</b>
<b>7.2</b>	<b>Recherche de la position connaissant les modes propres avant et après le changement de la masse</b>	<b>85</b>
7.2.1	Permutation des modes propres	85
7.2.2	Méthodes de recherche de la position de la modification	89
<b>7.3</b>	<b>Comparaison des trois méthodes sur des exemples numériques</b>	<b>91</b>
<b>7.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>98</b>

---

## 7.1 Introduction

Après la détermination de l'instant de la variation de la masse d'un système dynamique linéaire discret présentée dans le chapitre 6, l'étape 2 consiste à détecter la position de cette variation. En d'autres termes, pour un système à  $n$  masses ayant subi une modification au niveau d'une ou plusieurs masses, il est très utile de localiser l'endroit de cette ou de ces modifications.

Après la description de plusieurs méthodes de décomposition orthogonale dans le chapitre 3, nous choisissons d'utiliser les *POMs* calculés avant et après une modification de la masse. Pour mettre en correspondance les vecteurs propres initiaux stockés dans la matrice  $POM_{av}$  avec ceux de la matrice  $POM_{ap}$  nous utilisons la méthode Modal Assurance Criterion (MAC) [30] qui est décrite dans le paragraphe 7.2.1. Une fois que les vecteurs propres sont bien mis en correspondance avec la bonne orientation, nous développons trois méthodes différentes de détection de la masse dans le paragraphe 7.2.2. Enfin, et dans le but de vérifier numériquement l'efficacité de ces méthodes, nous présentons quelques résultats obtenus en traitant des données numériques dans le troisième paragraphe.

## 7.2 Recherche de la position connaissant les modes propres avant et après le changement de la masse

La localisation de la modification en masse de l'état initial du système dynamique (étape 2 de la problématique décrite dans le chapitre 5) consiste à détecter la ou les masses qui ont changé. Nous supposons connaître les réponses libres de notre système avant et après le changement de masse. Les deux matrices de réponses correspondantes sont obtenues sur deux intervalles de temps différents grâce à des capteurs de déplacement ou d'accélération. Connaissant ces deux matrices, nous approchons les modes propres avant ( $POM_{av}$ ) et les modes propres après ( $POM_{ap}$ ) le changement, grâce à l'une des méthodes d'analyse de données explicitées dans le chapitre 3. Notre but est de trouver à partir de ces  $POM_{av}$  et  $POM_{ap}$  la position en espace des changements de masse.

Comme le changement des paramètres d'un système entraîne un changement des déformées modales, et en se basant sur la variation des déformées modales avant et après un endommagement, nous cherchons la position du changement de la masse.

### 7.2.1 Permutation des modes propres

Les deux matrices  $POM_{av}$  et  $POM_{ap}$  de dimension  $n \times n$  qui approchent les modes propres du système avant et après sont calculées par des méthodes telles que la POD, la TO, la SOD ou la SVD. On suppose que les variations de masse ne sont pas trop importantes et que les déformées modales sont peu modifiées. Mais elles ne sont pas forcément rangées dans le même ordre dans ces deux matrices. Nous cherchons donc la bonne permutation pour ensuite pouvoir comparer ces déformées modales et détecter la position de la plus grande variation. La comparaison se fera grâce à une matrice appelée la matrice de différence qui montre les valeurs des écarts entre les *POMs*.

## Méthode

Le calcul de la matrice de différence entre les  $POM_{av}$  et les  $POM_{ap}$  exige la cohérence entre les vecteurs propres. D'où, la permutation des vecteurs de la matrice  $POM_{ap}$  en utilisant la méthode MAC (Modal Assurance Criterion), aussi appelée matrice de corrélation modale [30].

Les matrices  $POM_{av}$  et  $POM_{ap}$  sont des matrices orthogonales (les vecteurs colonnes sont normés et deux à deux orthogonaux). La matrice  $MAC$  définie par :

$$MAC = POM_{av}^T * POM_{ap} \quad (7.1)$$

permet de quantifier le degré de corrélation entre deux vecteurs par une valeur qui varie entre  $-1$  et  $1$ . La valeur nulle signifie une non corrélation entre les POMs correspondants, alors que la valeur unitaire ( $1$  ou  $-1$ ) signifie une corrélation parfaite. Ainsi la matrice  $MAC$  peut être de la forme suivante :

$$MAC = \begin{pmatrix} -0,9971 & -0,0238 & -0,0093 & -0,0367 & -0,0619 \\ -0,0210 & -0,0202 & 0,0813 & -0,0745 & 0,7332 \\ 0,0689 & 0,0169 & -0,0697 & -0,7374 & -0,0681 \\ 0,0241 & -0,9751 & 0,2152 & 0,0027 & -0,0476 \\ 0,0082 & -0,2189 & -0,9706 & -0,0026 & 0,0995 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Il est utile de noter que lorsque  $MAC(i, j) \approx \pm 1$ , on peut déduire que le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la matrice  $POM_{av}$  est presque colinéaire avec le  $j^{\text{ème}}$  vecteur de la matrice  $POM_{ap}$ .

La figure (7.1) est une représentation en 2D des valeurs de la matrice  $MAC$  présentée dans l'équation (7.2). Cette figure indique par exemple que le  $2^{\text{ème}}$  mode des  $POM_{ap}$  est très bien corrélé avec le  $4^{\text{ème}}$  mode des  $POM_{av}$  avec un coefficient de corrélation supérieur à  $0,9$  en valeur absolue.

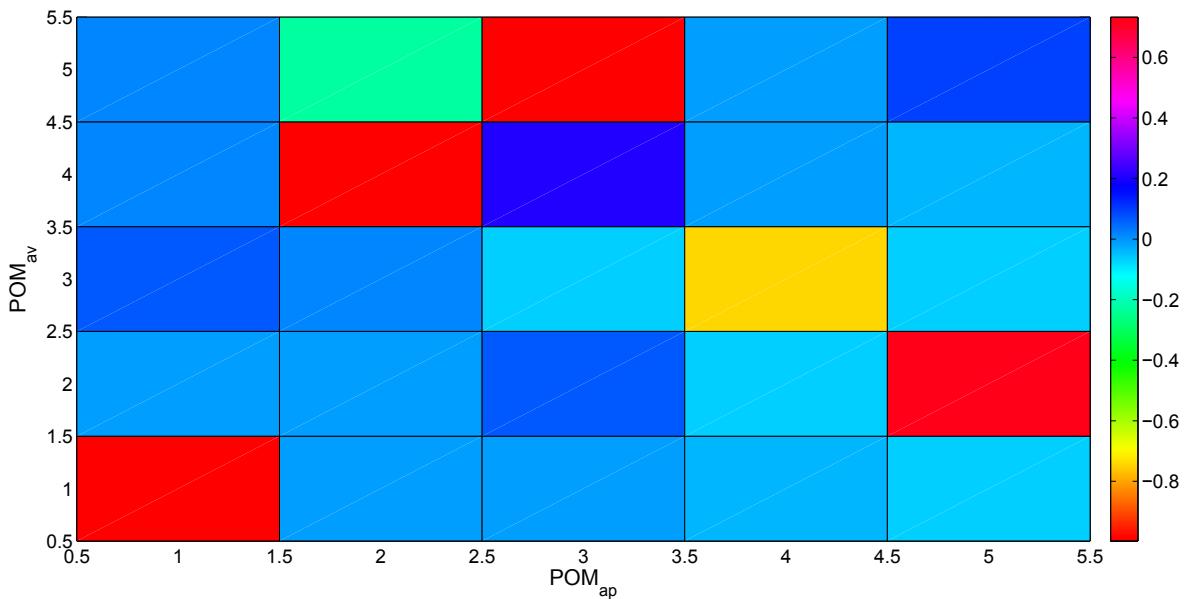


FIGURE 7.1. Représentation en 2D des valeurs de la matrice  $MAC$  de l'équation (7.2).

Si on remplace la valeur absolue du maximum de chaque colonne de la matrice  $MAC$  par 1 ou  $-1$  (selon le signe) et les autres termes de la colonne par des zéros, alors la matrice  $MAC$ , définie dans l'équation (7.2), est approchée par la matrice  $Perm$  telle que :

$$Perm = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Cette matrice permet de mettre en correspondance les modes avant et après et de les orienter de la même manière. On appelle  $PermPOM_{ap}$  la matrice où des vecteurs propres du système après modification sont réarrangés pour être en correspondance avec les vecteurs colonnes de  $POM_{av}$  et on la définit par :

$$PermPOM_{ap} = POM_{ap} * Perm \quad (7.4)$$

Sachant que les  $POM_{av}$  ne changent pas, nous posons  $PermPOM_{av} = POM_{av}$ . Nous récupérons ainsi des vecteurs propres avant et après modification cohérents, bien permutés et ayant une orientation semblable.

### Difficulté

Malheureusement, ceci ne se passe pas toujours aussi bien au niveau de la recherche des maxima proches de 1 ou de  $-1$ . Il se peut parfois que la colinéarité entre deux vecteurs ou plus soit mise en question, dans le sens où le maximum de la valeur absolue n'est pas nettement mis en évidence et donc peut être confondu avec une autre valeur.

Par exemple, considérons une matrice  $MAC$  de la forme suivante :

$$MAC = \begin{pmatrix} 0,2175 & -0,2267 & -0,3102 & -0,7110 & 0,6824 \\ 0,0304 & -0,9808 & 0,1966 & 0,1867 & 0,1429 \\ 0,0053 & -0,2049 & -0,9911 & -0,2028 & -0,3232 \\ -0,9982 & 0,2274 & 0,0021 & -0,1920 & 0,1829 \\ 0,0249 & 0,1343 & -0,0132 & -0,6805 & -0,6686 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Le maximum en valeur absolue de chaque colonne de  $MAC$  est encadré en rouge. Or, comme on peut le remarquer, le maximum des valeurs absolues des termes des deux dernières colonnes est atteint sur la première ligne. Ce qui semble indiquer que le premier vecteur de  $POM_{av}$  est proche en même temps avec les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> vecteurs de  $POM_{ap}$ , ce qui est inacceptable. Et donc en encadrant en vert la deuxième valeur maximale des deux vecteurs concernés, on remarque que le maximum en rouge est très proche du maximum en vert. Ainsi, la cohérence des 1<sup>er</sup> et 5<sup>ème</sup> vecteurs de la matrice  $POM_{av}$  n'est ni précise ni claire. Ceci est bien montré dans la figure (7.2), et spécialement au niveau des deux derniers modes : on voit clairement la confusion entre les vecteurs colinéaires associés.

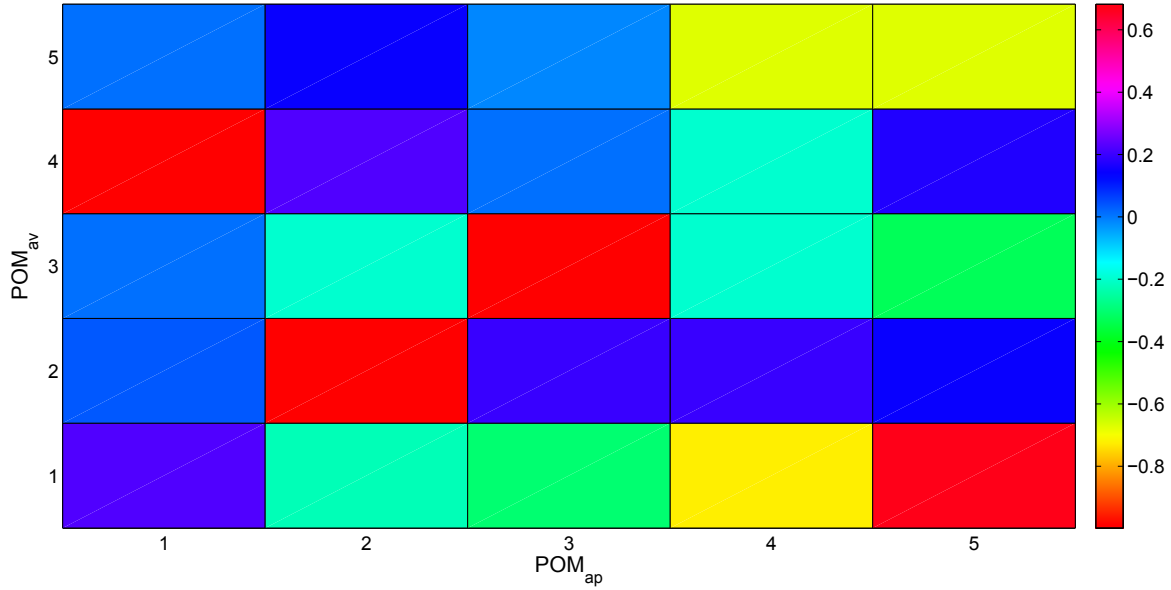


FIGURE 7.2. Représentation en 2D des valeurs de la matrice  $MAC$  de l'équation (7.5).

Dans ce cas, nous décidons de nous fixer une valeur minimale pour le maximum de la valeur absolue de chaque colonne de  $MAC$ ; notons cette valeur  $\epsilon_m$  et choisissons  $\epsilon_m = 0,75$ . Enfin, en imposant que chaque valeur absolue du maximum soit supérieure à au moins  $\epsilon_m$ , on ne prend en considération que les vecteurs ayant une colinéarité d'au moins de 75%; les autres vecteurs seront rejetés et la matrice  $MAC$  sera approchée par :

$$Perm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & -1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & -1 & . & . \\ -1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Grâce à cette matrice  $Perm$ , nous sommes capables de permuter les premiers trois vecteurs colonnes en rejetant les deux derniers. Ainsi :

$$\begin{aligned} PermPOM_{ap}(:, 1) &= -POM_{ap}(:, 4) \\ PermPOM_{ap}(:, 2) &= -POM_{ap}(:, 2) \\ PermPOM_{ap}(:, 3) &= -POM_{ap}(:, 3) \end{aligned}$$

avec la matrice des  $POM_{av}$  qui sera de la forme :

$$PermPOM_{av}(:, 1:3) = +POM_{av}(:, 1:3)$$

les matrices permutées  $PermPOM_{av}$  et  $PermPOM_{ap}$  sont maintenant cohérentes et de dimension  $3 \times 3$ .

### Cas de modification trop importante

Dans ce cas, il se peut, que tous les vecteurs soient rejetés. Par exemple, soit la matrice  $MAC$  de la forme suivante :

$$MAC = \begin{pmatrix} -0,0175 & -0,0267 & 0,0102 & -0,7210 & 0,6824 \\ -0,0304 & 0,6808 & 0,0066 & 0,0867 & 0,1429 \\ -0,0053 & -0,0049 & 0,5911 & -0,0028 & -0,0232 \\ 0,6982 & 0,0274 & 0,0021 & -0,0110 & 0,0182 \\ -0,0049 & 0,1343 & -0,0132 & -0,6805 & -0,6686 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

On remarque que tous les maxima des valeurs absolues des vecteurs colonnes sont strictement inférieurs à  $\epsilon_n = 0,75$  et donc tous les vecteurs seront exclus. On peut éventuellement poursuivre en baissant la valeur du seuil  $\epsilon_n$  et en prenant par exemple ici  $\epsilon_n = 0,6$ . Mais l'analyse qui suit, risque de ne plus être pertinente.

### 7.2.2 Méthodes de recherche de la position de la modification

Nous disposons maintenant des deux matrices  $PermPOM_{av}$  et  $PermPOM_{ap}$  ayant des vecteurs propres en correspondance après la permutation et avec la même orientation.

La matrice de différence  $\Delta$  est alors définie par :

$$\Delta = |PermPOM_{av} - PermPOM_{ap}| \quad (7.8)$$

$\Delta$  représente la matrice des valeurs de l'écart entre les vecteurs propres avant et les vecteurs propres après modification de la masse. Nous commençons par chercher pour chaque vecteur colonne de  $\Delta$ , la valeur du maximum de l'écart et l'indice de la coordonnée correspondante. Nous allons chercher à détecter la position du changement de l'état initial du système en utilisant le vecteur maximum des écarts de dimension  $1 \times n$  et noté  $Max$  et le vecteur des indices noté  $Ind$ . Cette procédure illustrée dans la figure (7.3) est nécessaire avant le développement des trois méthodes de recherche de la position d'une modification de masse.

Nous allons étudier trois méthodes différentes pour cette recherche de la position de la modification de la masse. Ces trois méthodes sont toutes basées sur l'étude de la matrice des écarts. Nous supposons que plusieurs mesures sont effectuées sur le système après modification de la masse. Et donc pour chaque mesure de vibrations libres, on dispose de la matrice des écarts  $\Delta$  et donc des deux vecteurs  $Max$  et  $Ind$ .



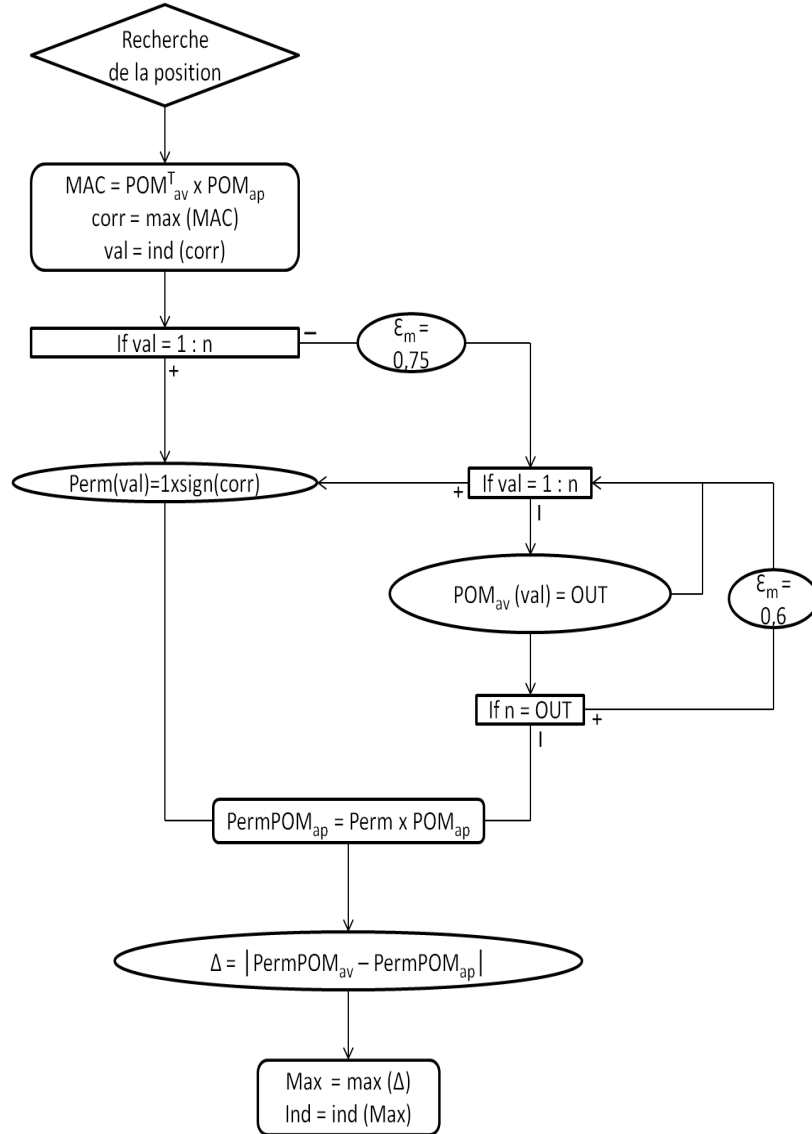


FIGURE 7.3. Représentation du calcul de la permutation des modes propres, de la matrice de différence  $\Delta$  et des vecteurs  $Max$  et  $Ind$ .

### 7.2.2.1 Détection de la position suivant l'occurrence des indices

Cette première méthode consiste à comptabiliser le nombre d'apparitions de chaque indice dans les différents vecteurs  $Ind$  obtenus après chaque mesure vibratoire (c.f. figure (7.3)). On définit une matrice *occurrence* de dimension  $p \times n$ , où  $p$  est le nombre de mesures dont on dispose de la façon suivante :  $occurrence(i, j) = k$  signifie que pour la mesure  $i$ , la position (ou l'indice)  $j$  est détectée  $k$  fois. Le nombre  $i$  caractérise la mesure et donc  $1 \leq i \leq p$  et le nombre  $j$  désigne la position éventuelle du changement de masse et donc  $1 \leq j \leq n$ .

Pour trouver le nombre total d'apparitions de chaque position, il suffit de faire la somme du nombre d'apparition dans chacune des  $p$  mesures. Nous obtenons alors un vecteur dont les composantes sont le nombre total d'apparition de chaque indice. Enfin, chaque  $j^{\text{ème}}$  valeur de ce vecteur correspond au nombre total de détection de la  $j^{\text{ème}}$  position pendant les  $p$  mesures. Donc,

chaque  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice *occurrence* correspond au nombre de détection de la  $j^{\text{ème}}$  position pendant les  $p$  mesures.

Dans la suite, nous choisissons de nommer cette méthode “OI” se référant à son nom “occurrence des indices”.

#### 7.2.2.2 Détection de la position suivant l’amplitude des écarts cumulés

Cette méthode consiste à prendre en compte non seulement la position de l’écart maximal dans chaque colonne de  $\Delta$  mais aussi l’amplitude de cet écart maximal.

Après chaque mesure, connaissant les vecteurs *Max* et *Ind*, au lieu de simplement comptabiliser le nombre de fois où un indice correspond à un maximum, nous additionnons les valeurs des écarts correspondants. Ainsi, la construction d’un vecteur noté *ecarts cumules* est possible pour montrer l’amplitude des écarts détectant la même position.

Avec une boucle portant sur les  $p$  mesures, *ecarts cumules* est donc une matrice de dimension  $p \times n$ . En d’autres termes, pour la  $p^{\text{ème}}$  mesure, l’écart cumulé de l’indice  $i$  correspond au terme *ecarts cumules*( $p, i$ ) pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ce terme est la somme de tous les maximums vérifiant  $Max_p(Ind_p(i))$  avec  $Max_p$  et  $Ind_p$  représentant les vecteurs *Max* et *Ind* calculés à la  $p^{\text{ème}}$  mesure.

Cette méthode sera désignée par “EC” (écarts cumulés) dans la suite.

#### 7.2.2.3 Détection de la position suivant l’écart maximal

Cette méthode, comme son nom l’indique se base sur le maximum des maxima des écarts. En effet, pour chaque mesure, nous calculons le maximum du vecteur *Max* ainsi que l’indice qui lui est associé. Après les  $p$  mesures du système, nous récupérons un vecteur de dimension  $p \times 1$  noté *ValMax* et un vecteur de même dimension noté *IndMax*.

La position de la modification de la masse est supposée correspondre à l’indice du maximum du vecteur *ValMax*. En conséquence, le terme *ValMax*( $p$ ), avec  $p$  une des mesures effectuées, correspond au maximum des écarts maximaux détecté sur la position *IndMax*( $p$ ).

On nomme cette méthode “EM” (écart maximal).

### 7.3 Comparaison des trois méthodes sur des exemples numériques

Nous effectuons plusieurs essais numériques pour analyser et vérifier l’efficacité de ces trois méthodes dans la détection de la position d’un changement de masse.

Soit un système dynamique linéaire non amorti à  $n = 10$  d.d.l encastré-libre. On considère que la masse totale de ce système est  $m_T = 50 \text{ kg}$  et que chaque masse locale vaut  $5 \text{ kg}$ . Nous allons calculer les réponses libres pour  $n \times n$  données initiales (conditions initiales :  $n$  excitations de déplacements  $\times n$  excitations de vitesses). Ainsi, on se trouve avec une matrice des écarts  $\Delta$  de dimension  $n^2 \times n$ .

En effectuant pour chaque cas l’étude des  $n^2$  excitations, nous testons dans ce paragraphe les trois méthodes de détection pour six tests différents.

– **Test 1 : forte augmentation de masse de 80%**

Nous testons dans un premier essai l'efficacité des méthodes de détection de la position de la variation de la masse du système ayant subi une augmentation de 80% de la quatrième masse locale ( $j = 4$ ) qui vaut un ajout de 8 % de la masse totale du système. Les résultats des trois méthodes sont schématisés dans la figure (7.4) et la bonne position de cette augmentation de masse est entourée par des pointillés rouges. D'après cette figure, la méthode de l'occurrence des indices OC indiquée par (a) et celle de l'écart maximal EM indiquée par (c) détectent la position 4 ; c'est la masse ayant subi cette augmentation. Par contre, la méthode des écarts cumulés EC indiquée par (b), détecte la position 5 se référant à la masse 5. Bien que le résultat de cette méthode n'est pas exact, il est à noter que le pic en 4 n'est pas négligeable contrairement aux autres positions. Ainsi, le résultat de l'analyse par la méthode EC n'est pas du tout loin de la bonne position de l'augmentation de la masse.

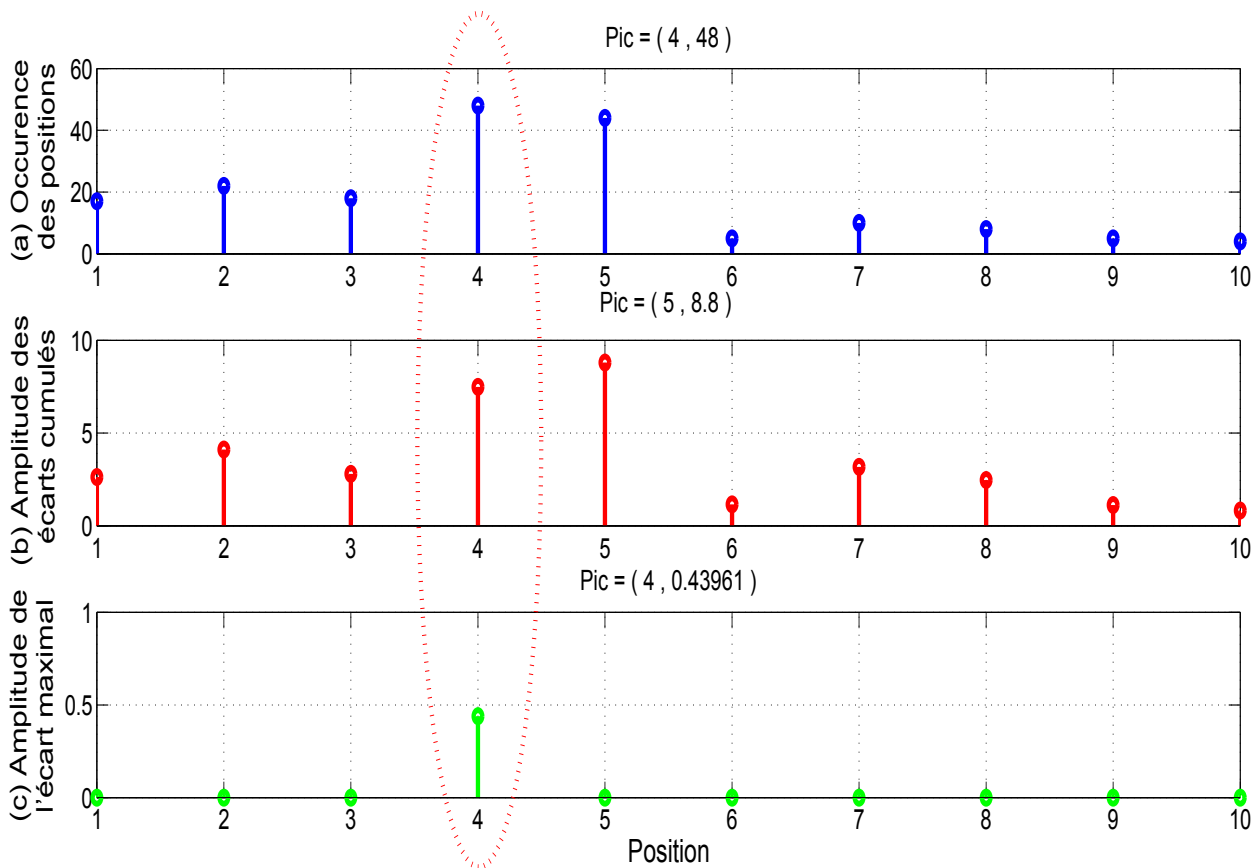


FIGURE 7.4. *Détection de la position de la modification de la masse. Augmentation forte de 80% de la masse locale au niveau de la masse 4.*

– **Test 2 : forte diminution de masse de 80%**

Dans le but de vérifier les résultats obtenus après une forte diminution de la masse locale, nous reprenons les mêmes conditions que le test 1 mais en effectuant une diminution de  $-80\%$  de la quatrième masse locale. Les résultats obtenus sont montrés dans la figure (7.5). Les méthodes OI et EC détectent sans soucis la bonne position 4 de cette diminution de la masse. La méthode EM, ne considérant que l'écart maximal, détecte la position 6 qui est un peu loin de la bonne position de la diminution de la masse.

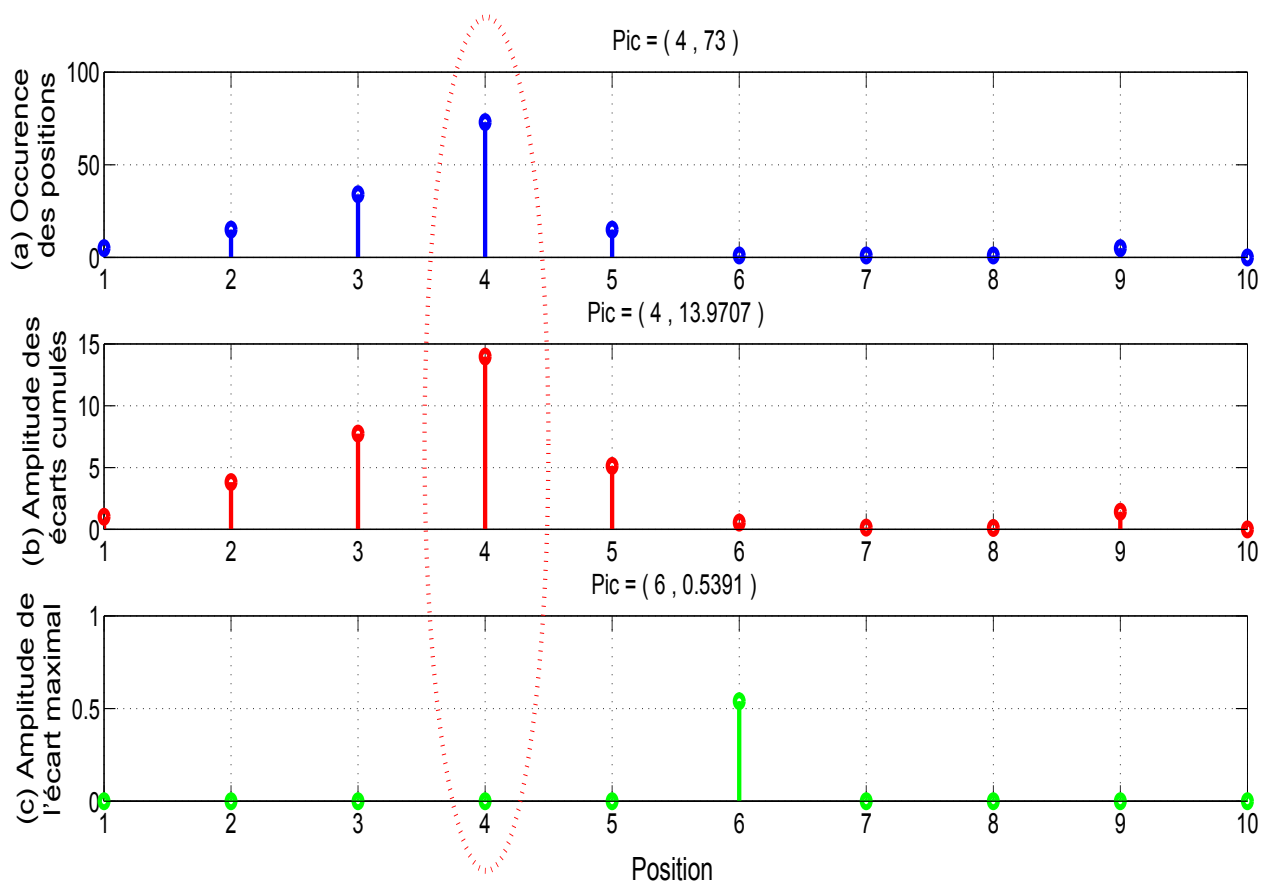


FIGURE 7.5. Détection de la position de la modification de la masse. Diminution de 80% de la masse locale au niveau de la masse 4.

– Test 3 : faible augmentation de masse de 20%

Dans le troisième test nous cherchons à répondre à la question suivante : “*que se passe t-il suite à une faible augmentation de la masse ?*”. Pour répondre à cette question nous supposons que le système étudié a subi une légère augmentation de la masse locale de +20 % au niveau de la sixième masse, c’est-à-dire, une augmentation de 2 % de la masse totale du système. De la figure résultante (7.6) nous trouvons que les trois méthodes OI, EC et EM sont fiables dans la détection de la bonne position 6 de la masse qui a subi cette légère augmentation.

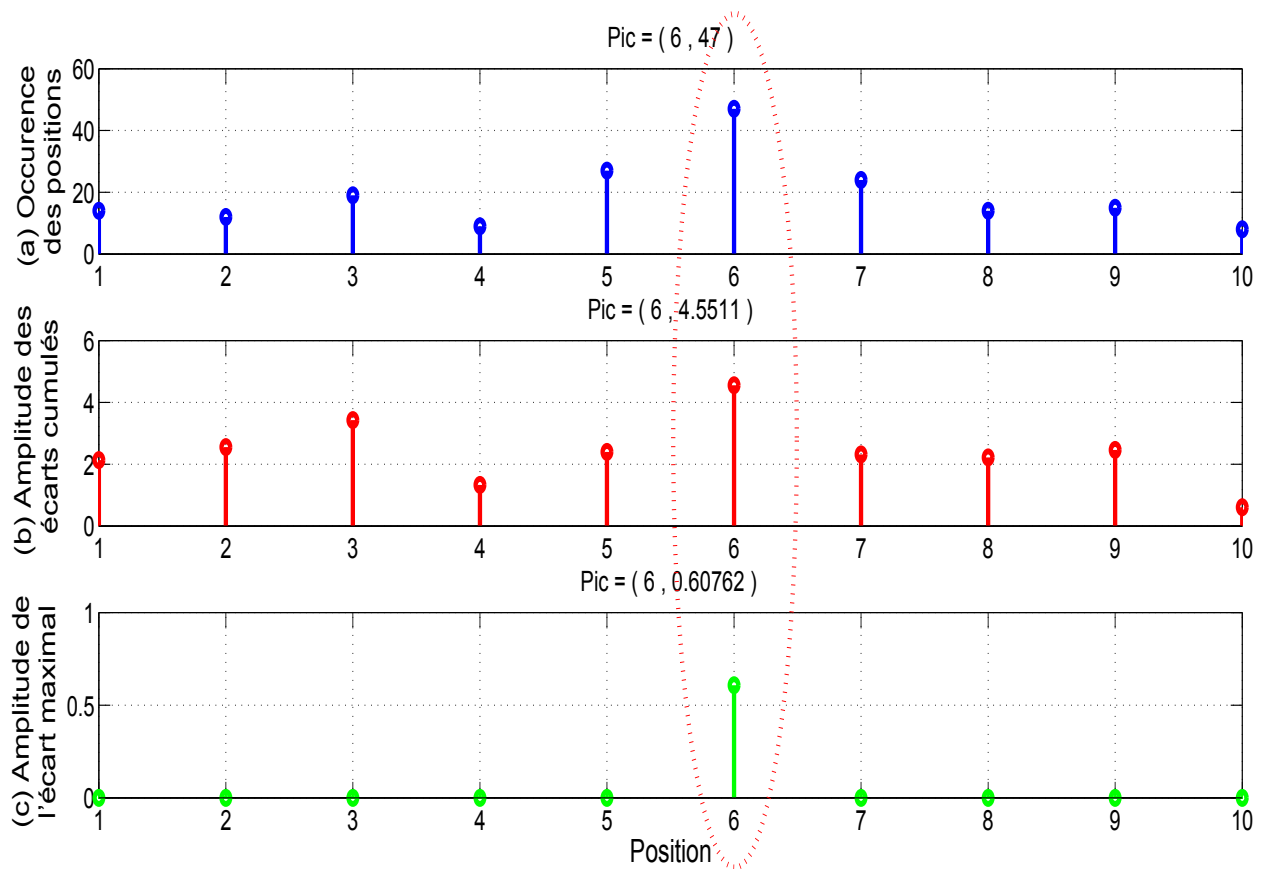


FIGURE 7.6. Détection de la position de la modification de la masse. Augmentation de 20% de la masse locale au niveau de la masse 6.

– **Test 4 : faible diminution de masse de 20%**

“Et à propos d’une faible diminution de la masse?”. La réponse à cette question est schématisée dans la figure (7.7) qui montre les résultats des trois méthodes appliquées aux modes propres du système ayant subi une légère diminution de la masse locale de  $-20\%$  au niveau de la sixième masse. Encore une fois, et même pour de légères modifications de la masse de l’ordre de  $2\%$  de la masse totale du système, les trois méthodes OI, EC et EM sont capables de détecter la bonne position 6 de la masse qui a subi cette légère diminution.

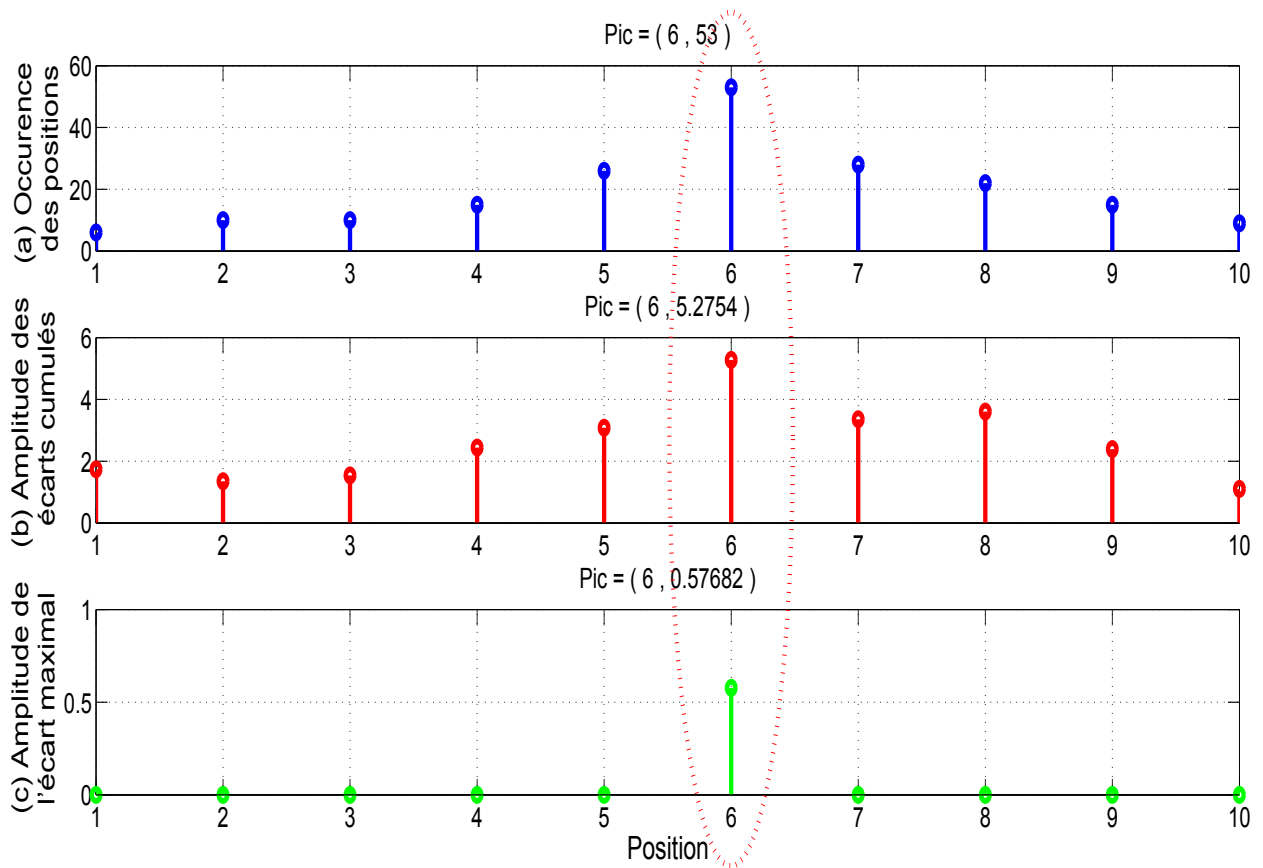


FIGURE 7.7. Détection de la position de la modification de la masse. Diminution de  $20\%$  de la masse locale au niveau de la masse 6.

– **Test 5 : deux faibles augmentations de masse de 10%**

En réalité, les systèmes physiques sont souvent exposés à plusieurs modifications de la masse en même temps ; d'où le but de vérifier l'efficacité de nos trois méthodes sur un système ayant subi deux augmentations faibles de +10 % au niveau de la cinquième et de la neuvième masse locale ; soit une augmentation de 2 % de la masse totale du système considéré.

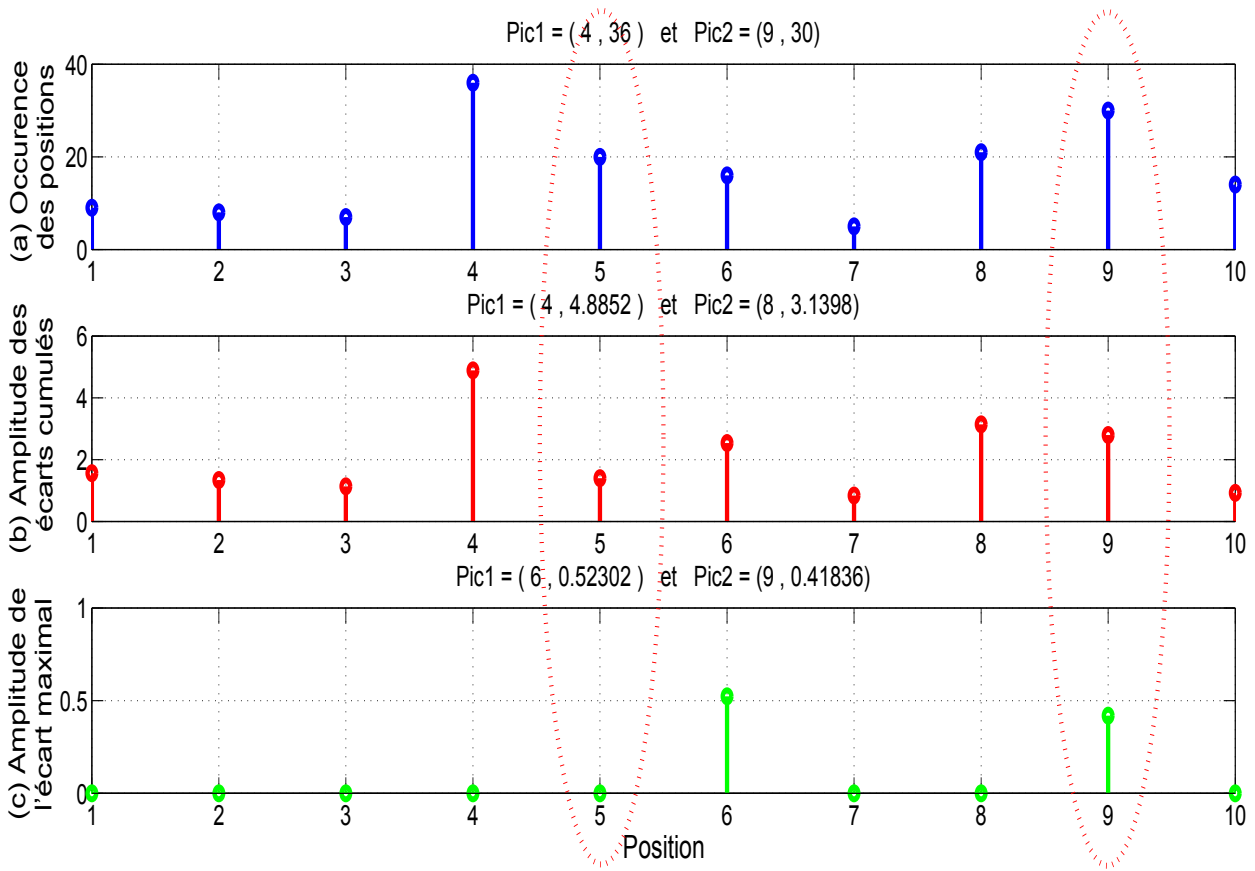


FIGURE 7.8. *Détection de la position de la modification de la masse. Augmentation de 10% de la masse locale au niveau des masses 5 et 9.*

Les résultats de l'analyse des trois méthodes de ce système sont présentés dans la figure (7.8). Par la méthode OI nous pouvons déduire que deux modifications de la masse ont été effectuées sur la quatrième et la neuvième masse. Tandis que, par la méthode EC, les positions 4 et 8 sont détectées et par la méthode EM, les positions 6 et 9 sont détectées. Il est vrai que ces méthodes ne détectent pas toujours les deux bonnes positions, mais celles détectées sont les plus proches de ces deux bonnes positions.

– **Test 6 : deux fortes diminutions de masse de 80%**

Enfin, pour ce dernier test, nous appliquons ces trois méthodes au système supposé avoir subi deux fortes diminutions de masse de  $-80\%$  au niveau de la deuxième et de la cinquième masse locale. Soit une diminution de  $16\%$  de la masse totale du système étudié. Les résultats obtenus sont intéressants et sont présentés dans la figure (7.9). Les trois méthodes OI, EC et EM détectent les deux bonnes positions des deux diminutions de masses et font preuve de leur efficacité dans plusieurs cas.

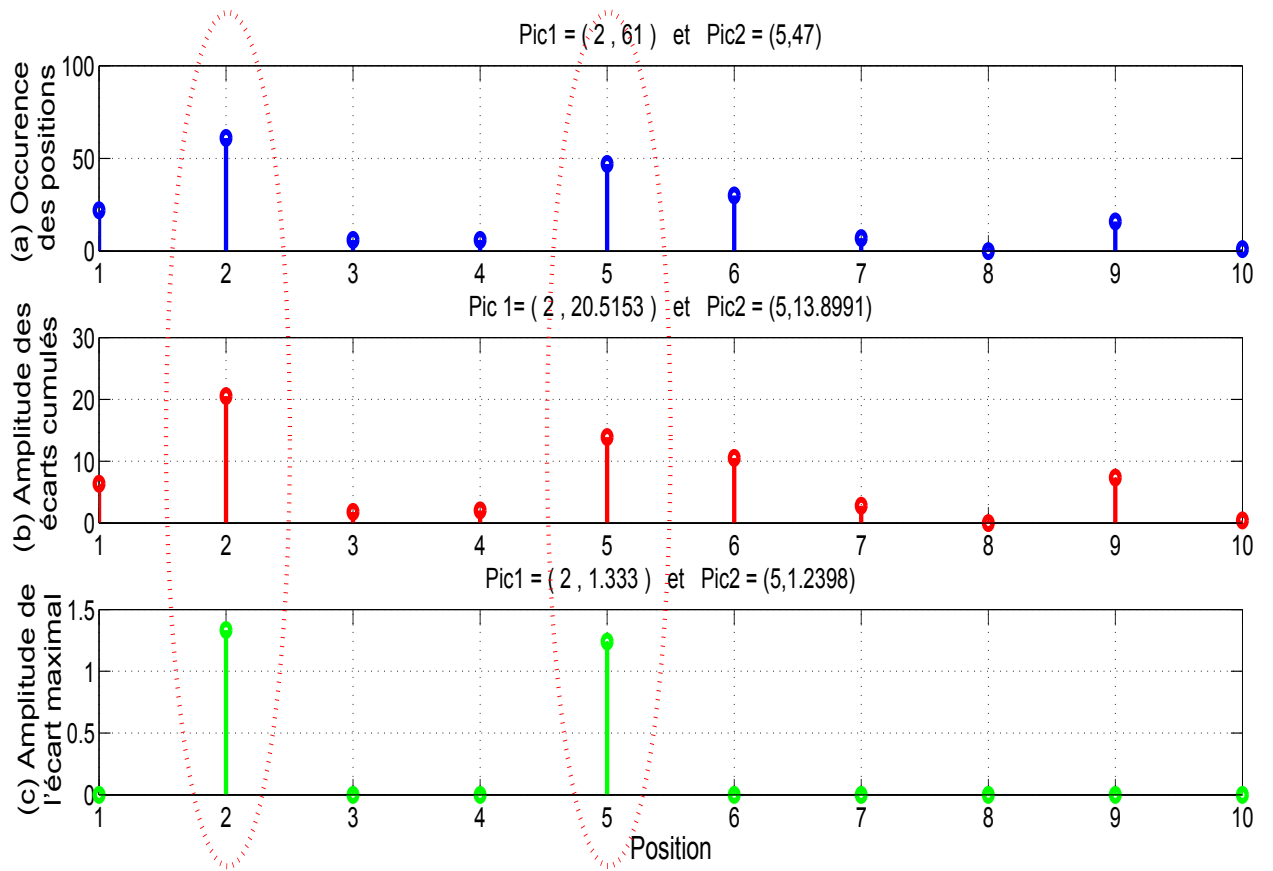


FIGURE 7.9. Détection de la position de la modification de la masse. Diminution de 80% de la masse locale au niveau des masses 2 et 5.



## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé trois méthodes de détection de la position des masses ayant subi une modification : OI, méthode de détection suivant l'occurrence des indices, EC, méthode de détection suivant l'amplitude des écarts cumulés et EM, méthode de détection de la position suivant l'amplitude de l'écart maximal. Cette détection de position consiste en l'étape 2 décrite dans le chapitre 5.

Nous avons vérifié l'efficacité de ces trois méthodes pour plusieurs cas : pour un système ayant subi une forte augmentation d'une masse locale (test 1), pour un système ayant subi une forte diminution d'une masse locale (test 2), pour un système ayant subi une faible augmentation d'une masse locale (test 3), pour un système ayant subi une faible diminution d'une masse locale (test 4), pour un système ayant subi deux faibles augmentations de deux masses locales (test 5) et pour un système ayant subi deux fortes diminutions de deux masses locales (test 6).

En conclusion, ces trois méthodes détectent souvent la bonne position. Et quand ces méthodes ne trouvent pas la bonne position, elles indiquent souvent une position voisine. En effet, la modification d'une certaine masse d'un système peut affecter le comportement des masses les plus proches de celle-ci. Ainsi, la variation des modes propres après une modification de masse  $i$  n'est remarquable que pour celle des masses  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$  (c.f. les figures (7.4) et (7.8)).

L'étape 3 portant sur la quantification de la ou des variations relatives de la masse est étudiée dans le chapitre 8. La méthode proposée est aussi testée numériquement.

## Chapitre 8

# Quantification des modifications de la masse

---

**L**'OBJECTIF de ce chapitre est de chercher à quantifier la valeur de la variation de la masse. Dans ce chapitre nous présentons une relation entre la variation relative des fréquences et celle de la masse. Cette relation est testée numériquement pour différents exemples.

---

PLAN DU CHAPITRE 8

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>101</b>
<b>8.2</b>	<b>Description des essais numériques</b>	<b>102</b>
<b>8.3</b>	<b>Analyse numérique préalable</b>	<b>103</b>
8.3.1	Cas des systèmes ayant subi des augmentations de leurs masses locales . .	107
8.3.2	Cas des systèmes ayant subi des diminutions de leurs masses locales . . .	109
8.3.3	Cas des systèmes ayant subi plusieurs augmentations et diminutions de leurs masses locales . . . . .	111
<b>8.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>

---

## 8.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'essayer de quantifier la variation de la masse en se servant des fréquences. Il est connu, et nous l'avons constaté au chapitre 6, qu'une augmentation de la masse entraîne une diminution des fréquences propres d'un système. Et inversement, une diminution de la masse entraîne une augmentation des fréquences propres. Nous allons essayer de montrer qu'une estimation de la variation relative de la masse peut être obtenue à partir de la connaissance de la variation relative des premières fréquences.

Dans le cas continu en espace, et plus précisément dans le cas d'une poutre bi-appuyée, Thi Thu Ha Le *et al* [49] ont établi, après discrétisation, une relation qui lie la variation relative des fréquences et celle de la masse entre les états avant et après modification de la masse.

Après discrétisation du système dynamique en un système à  $n$  d.d.l et si on note :

$f_k$  la  $k^{\text{ème}}$  fréquence propre de l'état initial supposé homogène,

$\Delta f_k$  la variation de la  $k^{\text{ème}}$  fréquence propre, c'est-à-dire,

$\Delta f_k = f_{kap} - f_{kav}$ ,

avec  $f_{kav}$  et  $f_{kap}$  les  $k^{\text{ème}}$  fréquences avant et après variation de la masse,

$m_T$  la masse totale du système,

$\Delta m$  la valeur de la variation de la masse,

$n_i$  la position où un changement local de la masse a eu lieu,

alors pour tout indice  $k$  tel que  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on obtient la relation suivante :

$$-\frac{\Delta f_k}{f_k} = \frac{\Delta m}{m_T} \sin^2 \left( 2k\pi \frac{n_i}{n} \right) \quad (8.1)$$

Ainsi, d'après la relation (8.1) et comme le sinus carré varie entre 0 et 1, on en déduit que pour une augmentation locale de la masse on devrait avoir l'estimation suivante :

$$\text{pour } k \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 \leq -\frac{\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{\Delta m}{m_T} \quad (8.2)$$

Et pour une diminution locale de la masse on devrait avoir :

$$\text{pour } k \in \{1, \dots, n\}, \quad -\frac{\Delta m}{m_T} \leq -\frac{\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.3)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons tout d'abord un descriptif des différents essais numériques et les hypothèses posées dans le paragraphe 8.2. Ensuite, nous allons étudier numériquement la réaction d'un système dynamique discret à une ou plusieurs augmentations locales de masse dans le paragraphe 8.3.1. Puis nous étudierons le cas d'une ou plusieurs diminutions locales de la masse dans le paragraphe 8.3.2. Enfin nous étudierons une modification complexe comportant une augmentation de la masse locale en différents points et une diminution en d'autres points dans le paragraphe 8.3.3. Nous essaierons alors d'en déduire un comportement général et surtout un moyen d'évaluer, même de manière approximative, la variation relative de la masse.

## 8.2 Description des essais numériques

La relation (8.1) a été établie dans le cas continu et homogène en espace. Pour la vérifier numériquement nous choisissons un système à  $n$  d.d.l et dont toutes les masses sont identiques (*i.e.*  $m_k = m$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) et dont la masse totale  $m_T$  vaut donc la valeur  $n \times m$ . Ainsi, la matrice de masse initiale du système, de dimension  $n \times n$ , est de la forme suivante :

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Pour simplifier les observations nous supposons que la masse totale initiale du système est telle que  $m_T = 1 \text{ kg}$  et que la constante de rigidité vaut toujours 1, sachant que ces simplifications n'affectent pas les variations relatives des fréquences et des masses qui sont les quantités qui nous intéressent.

La matrice  $\mathbf{K}$  peut correspondre soit à un système du type corde vibrante discrétisé ayant la condition de Dirichlet aux deux bouts, ou seulement Dirichlet à une extrémité et Neumann à l'autre. Comme le cas expérimental traité au chapitre 9 qui concerne une maquette de bâtiment, soit un système vibrant ayant la condition de Dirichlet à un bord et la condition de Neumann à l'autre bord. Ainsi, nous choisissons pour nos essais numériques, un système encastré-libre qui ressemble au cas expérimental traité plus tard et dont la matrice de rigidité normalisée  $\mathbf{K}$  est donnée par :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

Le système étudié numériquement est un système quasi-stationnaire dont la masse locale d'une particule change après un certain temps. La nouvelle matrice de masse sera notée  $\mathbf{M}_1$ . Notons  $n_i$  la position et  $vn_i$  la valeur en pourcentage de ce changement de la masse locale  $m$ . Les fréquences  $f_{kav}$  et  $f_{kap}$  sont calculées, respectivement, grâce aux valeurs propres  $\lambda_{kav}$  et  $\lambda_{kap}$  de la matrice  $\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{K}$  et de la matrice  $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{K}$  par la formule :

$$f_k = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2\pi} \quad (8.6)$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Vu que les fréquences varient comme la racine carrée des valeurs propres, les variations relatives des  $k$  fréquences sont obtenues à partir de la relation donnée par :

$$\frac{\Delta f_k}{f_k} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \lambda_k}{\lambda_k} \quad (8.7)$$

Par suite, connaissant les matrices  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{K}$ , nous pouvons, après le calcul des valeurs propres  $\lambda_k$ , récupérer les deux vecteurs des fréquences  $f_{kav}$  et  $f_{kap}$  de dimension  $n \times 1$  chacun.

Ici, il est utile de noter qu'on utilise le logiciel *Matlab* pour faire les simulations numériques et que la fonction *eig* est appliquée pour récupérer les modes propres et les fréquences propres des systèmes avant et après toute variation de la masse. Normalement, cette fonction *eig* permet de sortir les valeurs propres ordonnées; ce qui est le cas pour la matrice  $\mathbf{M}_0$  proportionnelle à la matrice identité. Or, une fois le changement d'une masse locale effectué, la matrice  $\mathbf{M}_1$  n'est plus proportionnelle à l'identité et donc la fonction *eig* n'est plus capable de produire les valeurs propres dans un ordre croissant (ni décroissant). Pour cela, et pour assurer une étude cohérente, nous choisissons avec la fonction *sort* d'ordonner les valeurs propres avant et après la variation de la masse dans le sens croissant. Le calcul de la variation relative des fréquences est ainsi effectué entre des fréquences bien corrélées.

La variation relative de la masse totale est donnée par :

$$\frac{\Delta m}{m_T} = \frac{m \times v n_i}{m_T} = \frac{v n_i}{n} \quad (8.8)$$

$\Delta m$  représente la valeur (positive ou négative) de la variation (augmentation ou diminution) de la masse. Vu que le symbol  $\Delta m$  ne permet pas de refléter si une variation de la masse est positive ou négative, nous le remplaçons dans toute la suite par  $\Delta m_+$  et  $\Delta m_-$  qui représentent respectivement la valeur absolue de la variation positive et négative de la masse. Ainsi, après une augmentation de la masse, la nouvelle valeur de la masse locale sera donnée par  $m = m + \Delta m_+$ . Dans le cas d'une diminution de la masse, la nouvelle masse locale vaut ainsi  $m = m - \Delta m_-$ .

### 8.3 Analyse numérique préalable

Examinons dans ce paragraphe le comportement des fréquences avant et après différentes variations de masses locales. Ensuite, dans les paragraphes 8.3.1, 8.3.2 et 8.3.3, nous présentons les résultats de la variation relative des fréquences obtenus après différentes augmentations de la masse, diminutions de la masse et des deux cas ensembles respectivement.

On suppose qu'on a un système à  $n = 100$  d.d.l et ayant comme masse totale  $m_T = 1$  kg pour des raisons de simplicité. Ces hypothèses sont inchangées au cours de l'étude numérique dans ce paragraphe. Nous choisissons, au fur et à mesure, la position  $n_i$  et la valeur  $\Delta m_+$  ou  $\Delta m_-$  selon le cas d'étude souhaité.

Vérifions tout d'abord que les fréquences propres après un ajout de la masse diminuent légèrement par rapport aux fréquences propres à l'état initial du système.

Pour cela, nous choisissons par exemple une augmentation de 50 %, c.à.d.,  $v n_i = +0,5$  de la masse locale de la position  $n_i = 33$ . La figure (8.1) schématise chacune des 100 fréquences propres à l'état initial du système,  $f_{kav}$ , en bleu et des 100 fréquences après augmentation de la masse,  $f_{kap}$ , en rouge. De cette figure nous pouvons déduire que toutes les fréquences sont bien en cohérence et sont croissantes. De plus, il est remarquable que toutes les fréquences  $f_{kap}$  diminuent faiblement par rapport aux fréquences  $f_{kav}$ .

Maintenant, vérifions que les fréquences propres après une diminution de la masse augmentent légèrement par rapport aux fréquences propres à l'état initial du système.

Nous effectuons ainsi un test numérique en diminuant la valeur de la masse locale de 50 %, c.à.d.,  $v n_i = -0,5$  sur la position  $n_i = 33$ . La figure (8.2) schématise chacune des 100 fréquences avant diminution de la masse,  $f_{kav}$ , en bleu et des 100 fréquences après diminution de la masse,  $f_{kap}$ ,

en rouge. Nous remarquons que les  $f_{kap}$  augmentent légèrement par rapport aux  $f_{kav}$  à l'exception de la dernière fréquence  $f_{100ap}$  qui augmente considérablement par rapport à la dernière fréquence  $f_{100av}$ .

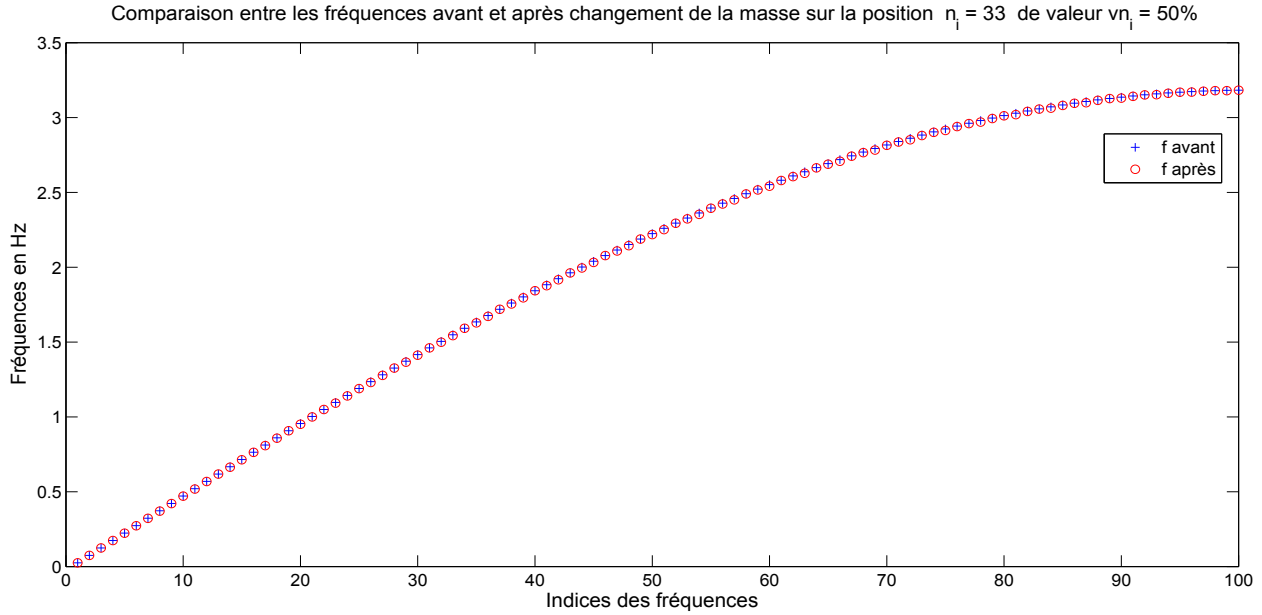


FIGURE 8.1. Les fréquences avant et après une augmentation de 50 % de la masse locale à la 33<sup>ème</sup> position.

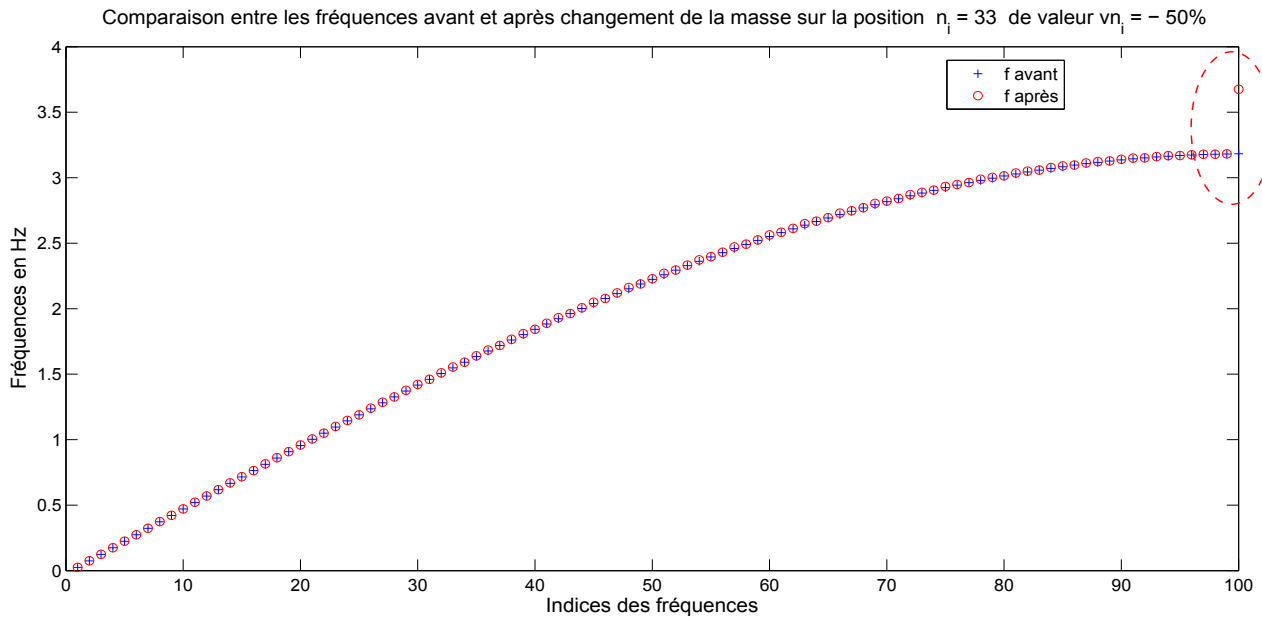


FIGURE 8.2. Les fréquences avant et après une diminution de 50 % de la masse locale à la 33<sup>ème</sup> position.

Le cas de la diminution de la masse est assez différent. En effet, nous ne pouvons pas diminuer

la masse locale  $m$  d'une quantité  $m$  sous peine de rendre la matrice  $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{K}$  singulière. Lorsque nous diminuons localement une masse de  $\Delta m_-$ , la masse locale devient  $m - \Delta m_-$  qui peut être éventuellement très petite mais qui doit rester positive selon nos hypothèses.

Dans le cas limite où  $n = 1$  avec  $\mathbf{M}_0^{-1} = \frac{1}{m_T}$  et  $\mathbf{K} = 2$ , la seule valeur propre est  $\lambda = \frac{2}{m_T}$ . Dans le cas plus général où  $n > 1$ , la plus grande valeur propre  $\lambda_n$  sera de l'ordre de  $\frac{2}{m}$ . Lorsque nous diminuons localement une masse de  $\Delta m_-$ , la masse locale devient  $m - \Delta m_-$  qui est éventuellement très petite. Ainsi, on peut comprendre que la plus grande valeur propre devienne de l'ordre de  $\frac{2}{m - \Delta m_-}$ . Dans le cas traité numériquement  $\frac{2}{m - \Delta m_-} = \frac{2}{0.005} = 400$  or la dernière valeur propre est  $\lambda_{nap} = 550$ . Elle est bien du même ordre de grandeur.

Ce comportement est vérifié pour différents degrés de liberté  $n$ . Ceci explique un peu pourquoi la plus grande fréquence augmente considérablement comme l'on observe dans la figure (8.2) si nous diminuons une des masses locales avec  $0 \leq m - \Delta m_- \leq m$ . Par contre, les  $n - 1$  autres fréquences ont tendance à augmenter légèrement.

Nous avons ensuite étudié le cas où plusieurs masses locales diminuent en respectant bien sûr la condition  $0 \leq m - \Delta m_- \leq m$ . Nous présentons dans la figure (8.3) la comparaison entre les fréquences propres avant et après diminution de la masse locale en 3 positions simultanément : la position 5, la position 33 et la position 62, de la même valeur  $-\Delta m_-$  avec  $vn_i = -0,5$  chacune. De celle-ci nous déduisons que les premières fréquences propres  $f_{kap}$  augmentent légèrement par rapport aux fréquences  $f_{kav}$  associées. Mais dans la partie entourée en rouge, les trois dernières fréquences ont augmenté considérablement après la diminution des trois masses. Par conséquent, la relation (8.3) n'est pas vérifiée pour toutes les fréquences. On observe, après plusieurs essais numériques, que si il y a  $p$  diminutions des masses locales, alors les  $p$  dernières fréquences augmentent considérablement.

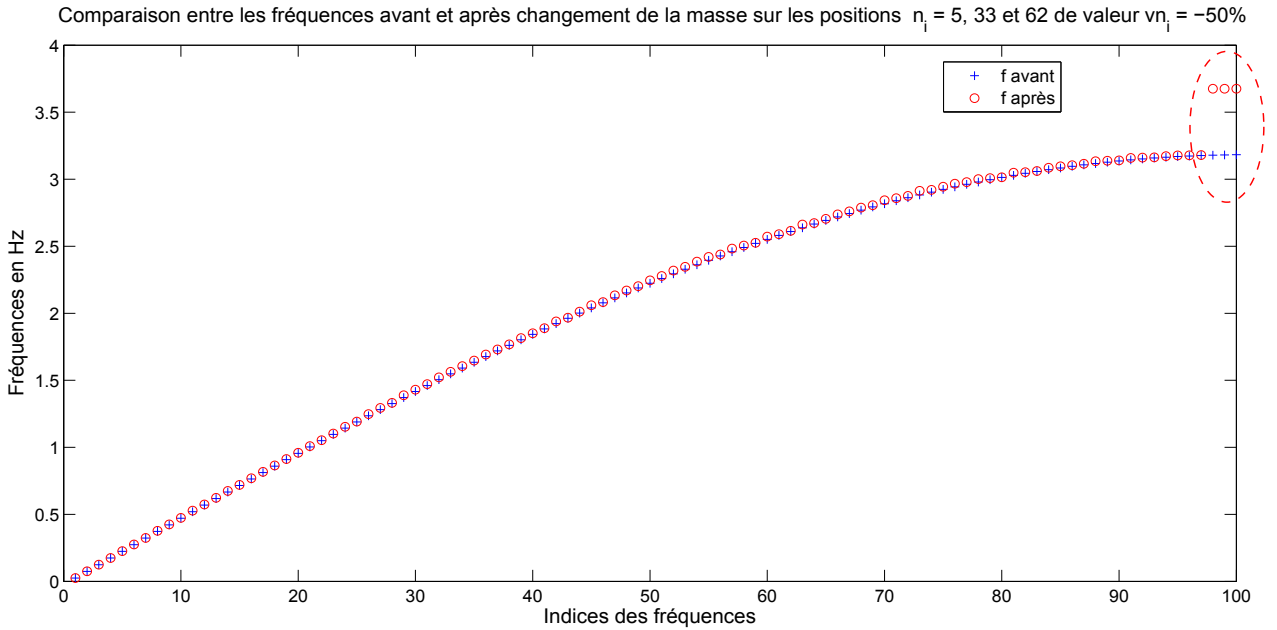


FIGURE 8.3. Les fréquences avant et après une diminution simultanée de 50 % de la masse locale sur les positions 5, 33 et 62.



Par conséquent la relation (8.3) ne semble être vérifiée que pour les  $n - p$  premières fréquences. Ainsi on va plutôt chercher à vérifier l'encadrement suivant :

$$\text{pour } k \in \{1, \dots, n - p\}, \quad -\frac{\Delta m}{m_T} \leq -\frac{\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.9)$$

Pour mieux comprendre le comportement de ces trois dernières fréquences après des diminutions de masses, les fréquences étant calculées à partir des valeurs propres de  $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{K}$ , nous présentons dans la figure (8.4) les trois derniers modes avant et après ces diminutions. Nous remarquons de cette figure que les modes propres après ces diminutions de masse, tracés en rouge, possèdent des pics qui se réfèrent aux trois positions de ce changement : la position 5 (figure (8.4)(c)) et les positions 33 et 62 (figures (8.4)(a) et (8.4)(b)).

À partir des observations de cette figure (8.4) et des remarques sur les trois positions des diminutions de masses, nous pouvons déduire qu'il est possible de trouver les positions de ces changements grâce aux derniers modes propres. En plus des trois méthodes décrites et discutées dans le chapitre 7, cette méthode semble être capable de détecter la (les) position(s) des diminutions de masse seulement. Normalement cette méthode pouvait attirer notre attention pour des études plus développées, mais vu que souvent les derniers modes ne sont pas faciles à détecter (expérimentalement), et vu que cette méthode n'est pas efficace après une augmentation de masse, nous décidons de retenir nos trois méthodes fiables.

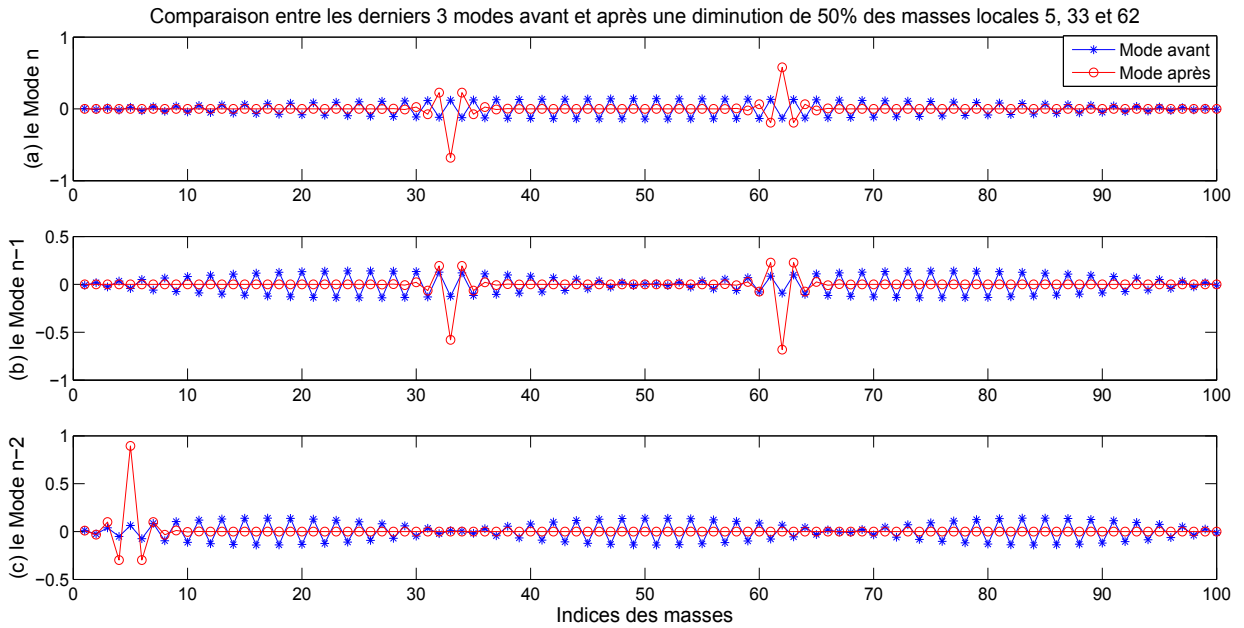


FIGURE 8.4. Les trois derniers modes avant (en bleu étoilé) et après (en rouge cerclé) une diminution de 50% des masses locales sur les positions 5, 33 et 62 : (a) les modes 100, (b) les modes 99 et (c) les modes 98.

Maintenant, nous voulons vérifier numériquement que toutes les  $n$  variations relatives des fréquences sont bornées comme il est montré dans les équations (8.2) et (8.9) en faisant varier la position  $n_i$  et la valeur en pourcentage  $vn_i$  de la variation de la masse. Aussi, nous étudions

plusieurs cas. Tout d'abord, dans le paragraphe 8.3.1, ce sont des systèmes ayant subi des augmentations de leurs masses locales qu'on note  $\Delta m_+$ . Des systèmes ayant subi des diminutions de leurs masses locales notées  $\Delta m_-$  sont traités dans le paragraphe 8.3.2. Enfin, nous présentons dans le paragraphe 8.3.3 le cas des systèmes ayant subi à la fois plusieurs augmentations et diminutions de leurs masses locales en différentes positions.

### 8.3.1 Cas des systèmes ayant subi des augmentations de leurs masses locales

Vu que, suite à une augmentation de la masse de  $\Delta m_+ > 0$  les fréquences propres diminuent, toute variation relative des fréquences est négative. Ainsi, l'opposé de la variation relative des fréquences est positive. Par conséquent, nous espérons vérifier dans ce cas que, conformément à la relation (8.2), on a :

$$0 \leq \max_{1 \leq k \leq n} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right) \leq \frac{\Delta m}{m_T} \quad (8.10)$$

Considérons notre système à 100 d.d.l ayant pour masse initiale totale  $m_T = 1 \text{ kg}$ , après une augmentation de la masse locale sur la position 33 de 50 %, c.à.d.,  $vn_i = +0,5$ . Il s'agit du cas présenté dans le paragraphe 8.3.

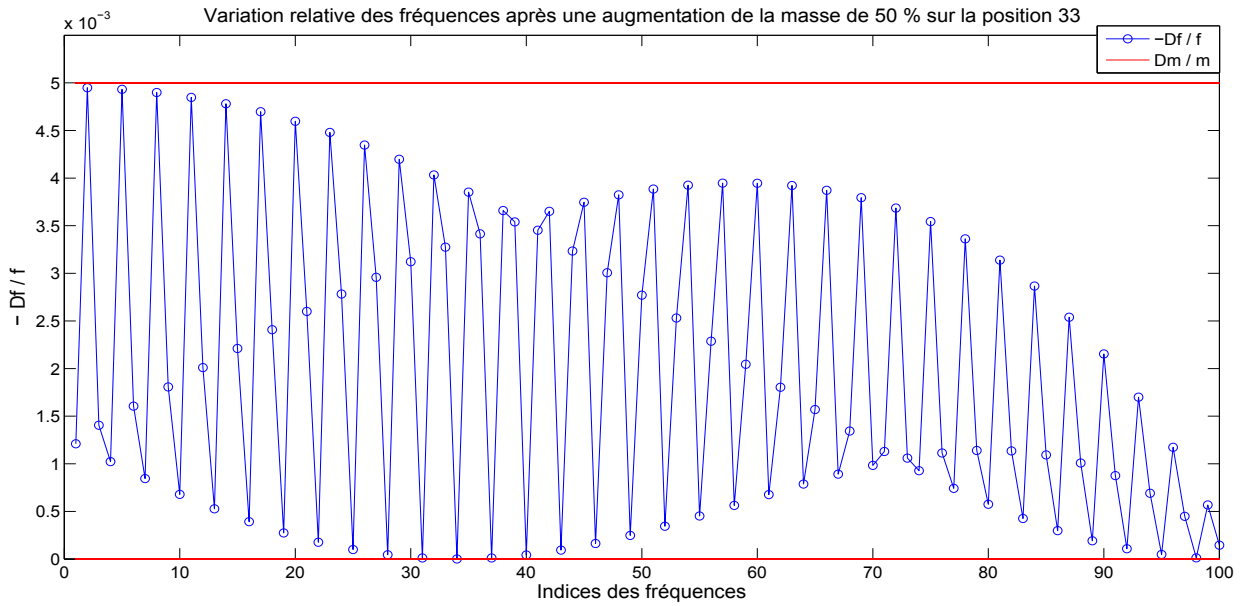


FIGURE 8.5. En rouge, le tracé de  $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à une augmentation de 50 % de la masse locale sur la 33<sup>ème</sup> position.

D'après la figure (8.5), nous pouvons vérifier que la variation relative  $-\frac{\Delta f_k}{f_k}$  de toutes les fréquences est bornée par 0 et  $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ . Mais de plus, nous pouvons constater que le maximum de  $-\frac{\Delta f_k}{f_k}$  des premières fréquences permet de bien approcher la valeur de  $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ . En effet, le maximum

des variations relatives des fréquences vaut 0,0049 et approche la valeur de la variation relative de la masse qui vaut 0,0050. Rappelons qu'on a choisi de classer les fréquences par ordre croissant. Il est donc intéressant de noter que la variation relative des fréquences les plus petites assure une meilleure approximation de la variation relative de la masse que celle des fréquences les plus hautes. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, pour approcher la valeur de  $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ , il suffit de connaître les valeurs des *deux* premières fréquences avant et après variation de la masse. Ceci est particulièrement intéressant car, de point de vue expérimental, la détection des petites fréquences est toujours facile et plus exacte que celle des grandes fréquences.

Nous observons numériquement que suite à une augmentation d'une masse locale de  $\Delta m_+$ , la variation relative de la  $k^{\text{ème}}$  fréquence  $\frac{\Delta f_k}{f_k}$  (pour tout  $k$  tel que  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) vérifie bien :

$$0 \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{\Delta m_+}{m_T} \quad (8.11)$$

À ce point là, nous nous posons la question suivante : *que se passe-t-il suite à l'augmentation de plusieurs masses locales ?*

Pour répondre à cette question nous effectuons un autre test numérique. Nous augmentons de la même valeur  $\Delta m_+ = 9 \text{ g}$ , trois masses locales différentes, celles en position 5, 15 et 33. Comme  $m = 10 \text{ g}$ , nous avons effectué une augmentation de 90 % de la masse locale sur ces positions. Les résultats de ce test sont présentés dans la figure (8.6).

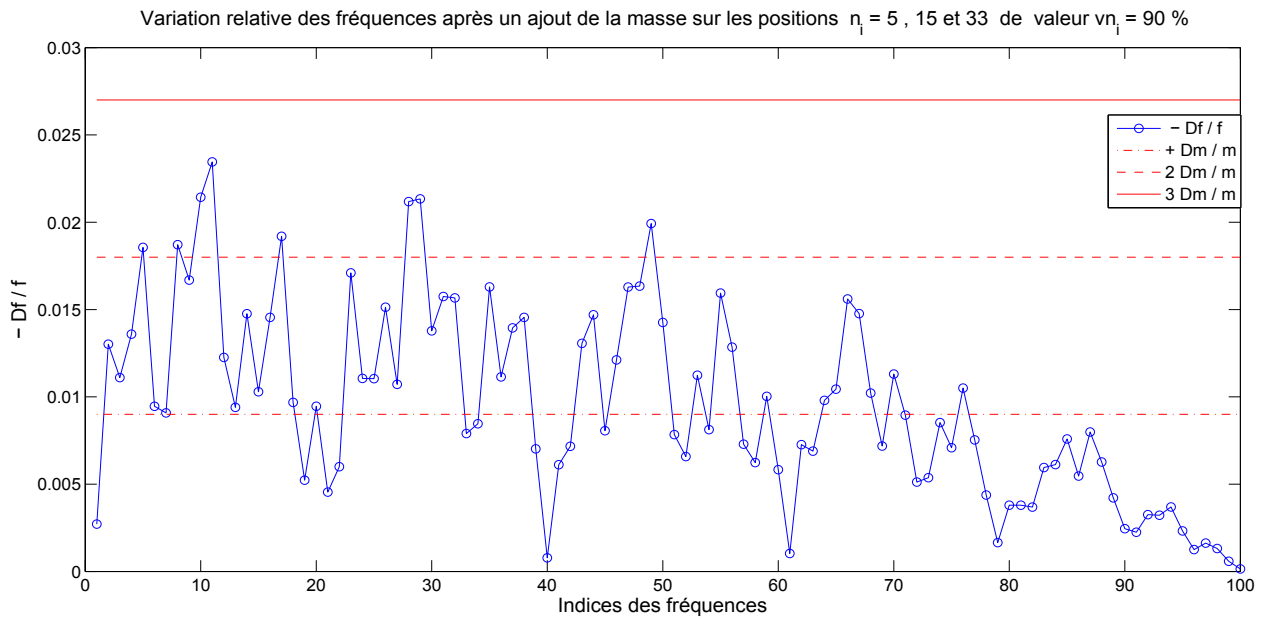


FIGURE 8.6. En rouge, les tracés de  $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ ,  $\frac{2\Delta m_+}{m_T}$  et  $\frac{3\Delta m_+}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à trois augmentations respectives de 90 % de la masse locale sur les 5<sup>ème</sup>, 15<sup>ème</sup> et 33<sup>ème</sup> masses.

De la figure (8.6) nous remarquons que, après une augmentation de trois masses locales de  $\Delta m_+$  chacune, toutes les variations relatives des fréquences sont telles que :

$$0 \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{3\Delta m_+}{m_T} \quad (8.12)$$

pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Mais dans le cas traité ici, la valeur de  $\frac{3\Delta m_+}{m_T}$  est plus difficile à évaluer puisque le  $\max_{1 \leq k \leq n} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right)$  est atteint pour la *onzième* fréquence. Ce maximum vaut 0,0234 alors que  $\frac{3\Delta m_+}{m_T} = 0,0270$ .

Plus généralement, soit  $\sum \Delta m_+$  la somme de toutes les augmentations de masses locales ; les  $\Delta m_+$  n'étant pas nécessairement les mêmes pour les différentes augmentations des masses locales. On peut vérifier numériquement que :

$$0 \leq \max_{1 \leq k \leq n} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right) \leq \frac{\sum \Delta m_+}{m_T} \quad (8.13)$$

Donc, la relation (8.13) généralise la relation (8.2) et décrit le comportement de toutes les variations relatives des fréquences  $-\frac{\Delta f_k}{f_k}$  suite à une ou plusieurs augmentations des masses locales d'un système donné.

Nous nous intéressons maintenant à l'étude des variations relatives des fréquences après des diminutions de masses. C'est un cas qui intervient par exemple dans les cas des câbles lorsqu'il y a endommagement suite à la rupture d'un des fils [49]. Nous examinons dans le paragraphe 8.3.2 les résultats obtenus suite à une diminution d'une ou plusieurs masses locales du système en supposant que la matrice de masse reste définie positive.

### 8.3.2 Cas des systèmes ayant subi des diminutions de leurs masses locales

On a constaté que la formule (8.3) n'est pas vérifiée en ce qui concerne les plus hautes fréquences dans le cas d'une diminution de la masse. Nous allons étudier de plus près l'encadrement proposé en (8.9) d'un point de vue numérique.

Dans le cas des diminutions de masses locales et donc de passage de  $m$  à  $m - \Delta m_-$ ,  $\Delta m_-$  est toujours positif et inférieur à  $m$ . En outre, la variation relative des fréquences est positive dans ce cas et donc l'opposé de cette variation relative est négative.

Nous considérons le même système à 100 d.d.l de masse totale  $m_T = 1 \text{ kg}$ . Cette fois, nous supposons une diminution de la 33<sup>ème</sup> masse locale d'une valeur  $vn_i = -0,5$ . À partir des résultats schématisés dans la figure (8.7), nous pouvons voir nettement que seule la dernière variation relative des 100<sup>ème</sup> fréquences avant et après diminution de masse (*i.e.* entre la plus grande fréquence avant et celle après cette diminution) n'est pas bornée par la valeur de  $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ . Ceci correspond au phénomène présenté au paragraphe 8.3 et dans la figure (8.2).

Indépendamment de ce problème, nous cherchons à présenter dans la partie inférieure de la figure (8.7) le *zoom* affichant toutes les variations relatives de  $-\frac{\Delta f_k}{f_k}$  pour toutes les fréquences de 1 à  $n - 1$ . Ne tenant pas compte de la dernière valeur, nous vérifions grâce à ce *zoom* que toutes les valeurs de l'opposé de la variation relative des fréquences sont bornées par  $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$  et 0. Ceci est cohérent avec la relation (8.9).

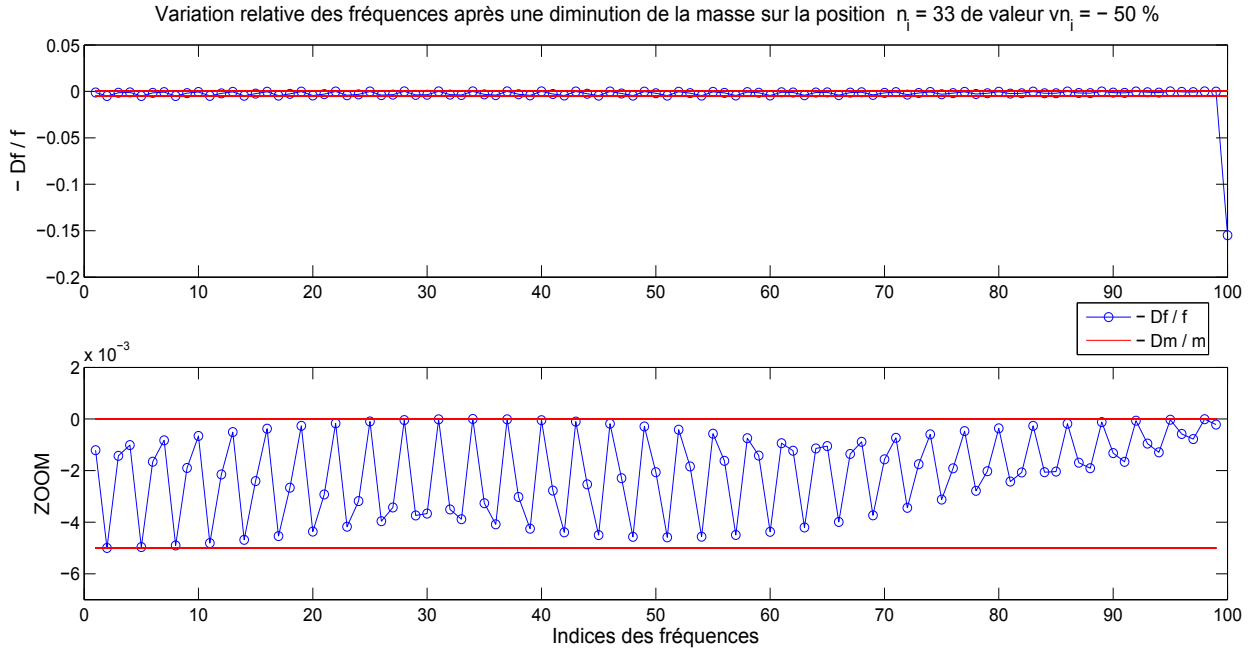


FIGURE 8.7. En rouge, le tracé de  $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à une diminution de 50 % de la masse locale sur la 33<sup>ème</sup> masse.

Nous déduisons en conséquence que, suite à une diminution d'une seule masse locale, la  $n^{\text{ème}}$  variation relative des fréquences varie fortement, et que les  $n - 1$  autres variations relatives des fréquences vérifient toujours les limites fixées par la relation suivante :

$$\frac{-\Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.14)$$

Les résultats obtenus dans la figure (8.7) montrent que le minimum de l'opposé des variations relatives des fréquences est atteint à la *deuxième* fréquence et vaut  $-0,0049$ . Ce minimum approche au mieux la valeur de  $\frac{-\Delta m_-}{m_T}$  qui vaut  $-0,005$ . Ainsi, dans ce cas, il suffit de connaître les deux premières fréquences pour approcher la valeur de la variation relative de la masse.

Il est de plus intéressant d'étudier le cas d'un système ayant subi une diminution de la masse sur plusieurs positions à la fois. Soient,  $n = 100$  d.d.l,  $m_T = 1 \text{ kg}$  et une diminution de la masse locale d'une valeur de  $vn_i = -0,9$  sur les positions 5, 15 et 33.

De cette figure (8.8), nous observons aussi qu'un système ayant subi une diminution de la masse sur trois différentes positions à la fois (cette diminution pouvant avoir effet sur n'importe quelles autres trois positions), possède les trois plus hautes valeurs propres qui augmentent considérablement. De plus, les  $n - 3$  autres variations relatives des fréquences respectent les bornes de la relation :

$$\frac{-3\Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.15)$$

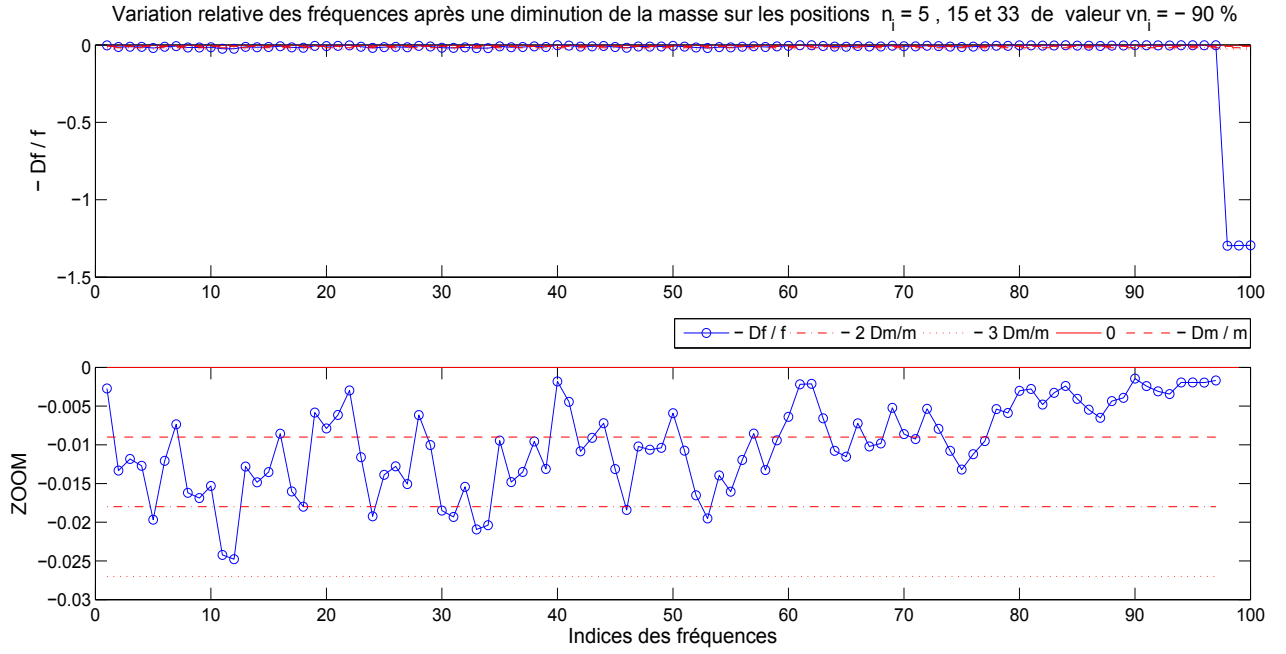


FIGURE 8.8. En rouge, les tracés de  $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ ,  $-\frac{2\Delta m_-}{m_T}$  et  $-\frac{3\Delta m_-}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à trois diminutions sur les 5<sup>ème</sup>, 15<sup>ème</sup> et 33<sup>ème</sup> masses de 90 % de la masse locale de chacune de celles-ci.

La relation (8.15) peut être exprimée plus généralement par :

$$\text{pour tout } k \text{ tel que } k \in \{1, \dots, n-p\}, \quad -\frac{\sum \Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.16)$$

où  $p$  représente le nombre de masses locales diminuées.

En conclusion dans le cas d'une diminution de la masse, si on exclut les fréquences les plus élevées, la relation (8.3) est vérifiée :

$$-\frac{\sum \Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.17)$$

Comme pour le cas d'un système ayant subi une augmentation de trois masses, nous remarquons de la figure (8.8) que l'évaluation de la valeur de  $-\frac{3\Delta m_-}{m_T}$  est plus compliquée. En effet, le minimum de l'opposé des variations relatives des fréquences vaut  $-0,0247$  tandis que  $-\frac{3\Delta m_-}{m_T} = -0,0270$ .

Enfin, nous discutons dans le paragraphe 8.3.3 le cas d'un système ayant subi à la fois plusieurs augmentations et diminutions de différentes masses locales.

### 8.3.3 Cas des systèmes ayant subi plusieurs augmentations et diminutions de leurs masses locales

Il est possible de rencontrer des systèmes ayant subi à la fois des augmentations et des diminutions de leurs masses locales. Pour de tel cas, nous testons numériquement si les valeurs des

variations relatives des fréquences sont toujours bornées par la somme des  $\Delta m_+$  des augmentations des masses et la somme des  $\Delta m_-$  des diminutions des masses. Dans ce cadre, nous supposons que le même système à 100 d.d.l a subi deux augmentations  $\Delta m_+$  de 60 % de la masse locale sur les positions 5 et 33 et trois diminutions  $\Delta m_-$  de -40 % de la masse locale sur les positions 62, 78 et 84. Les valeurs des variations relatives des fréquences sont tracées dans la figure (8.9).

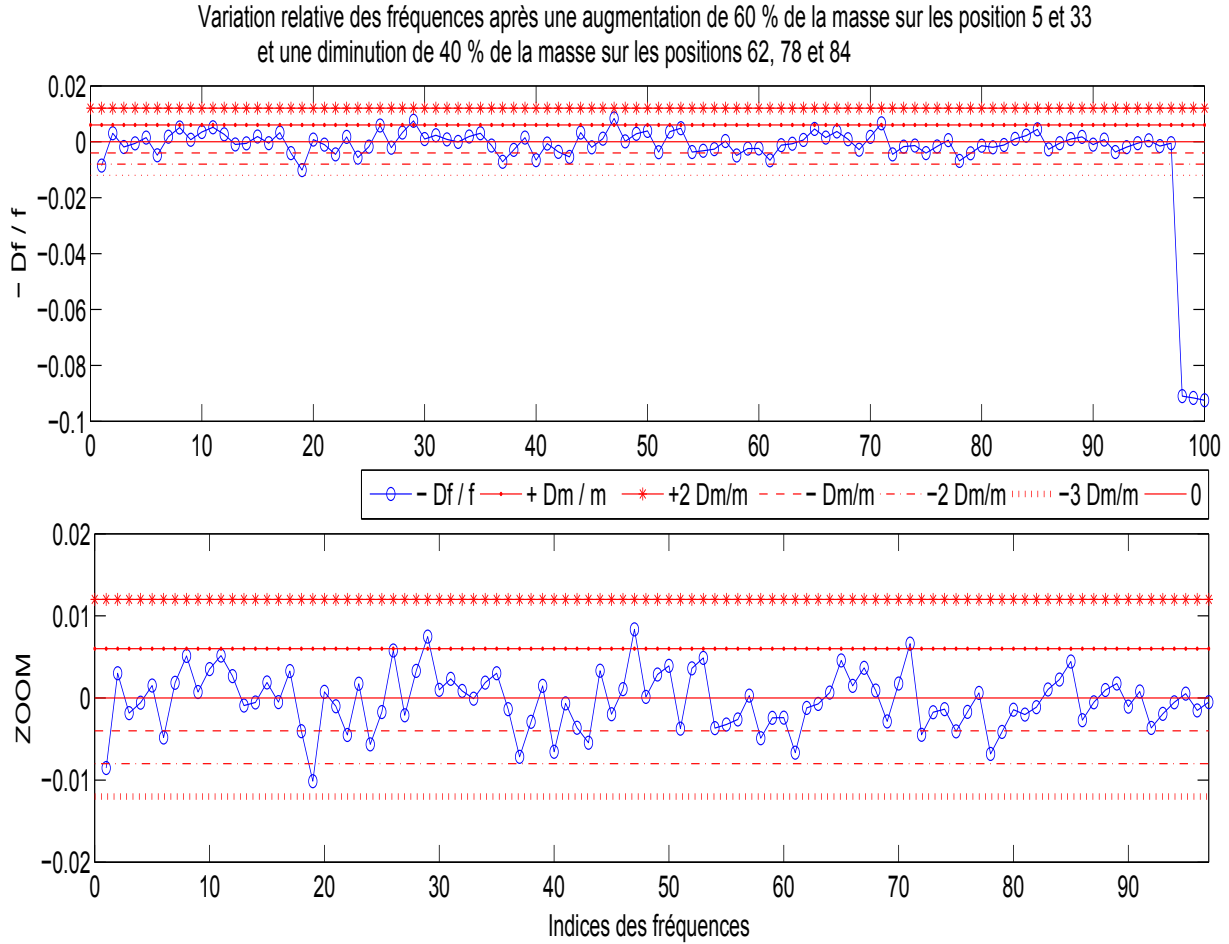


FIGURE 8.9. En rouge, les tracés de  $0$ ,  $\frac{\Delta m_+}{m_T}$ ,  $\frac{2\Delta m_+}{m_T}$ ,  $-\frac{\Delta m_-}{m_T}$ ,  $-\frac{2\Delta m_-}{m_T}$  et  $-\frac{3\Delta m_-}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à deux augmentations de 60 % de la masse locale sur les 5<sup>ème</sup> et 33<sup>ème</sup> masses et à trois diminutions de 40 % de la masse locale sur les 62<sup>ème</sup>, 78<sup>ème</sup> et 84<sup>ème</sup> masses.

Dans la figure (8.9), nous observons que, suite à trois diminutions  $\Delta m_-$  sur trois positions différentes, les trois variations relatives des trois plus grandes fréquences augmentent considérablement ; les trois plus hautes fréquences étant de l'ordre de  $\frac{2}{m - \Delta m_-}$ . Alors que les  $n - 3$  autres variations relatives des fréquences sont bien limitées par la somme des  $\Delta m_+$  et la somme des  $\Delta m_-$  de la manière suivante :

$$\frac{-3\Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{2\Delta m_+}{m_T} \quad (8.18)$$

pour  $1 \leq k \leq n - 3$ .

D'après cette figure (8.9), nous déduisons que, pour le cas traité dans ce paragraphe, les valeurs  $\frac{2\Delta m_+}{m_T}$  et  $\frac{-3\Delta m_-}{m_T}$  sont encore plus difficile à évaluer que pour les cas étudiés précédemment. Il est remarquable que le  $\max_{1 \leq k \leq n} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right)$  est atteint pour la fréquence 49 et que le  $\min_{1 \leq k \leq n-3} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right)$  est atteint pour la fréquence 19. Dans ce cas,  $\max_{1 \leq k \leq n} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right) = 0,0083$  et approche  $\frac{2\Delta m_+}{m_T} = 0,0120$  d'une part, et  $\min_{1 \leq k \leq n-3} \left( -\frac{\Delta f_k}{f_k} \right) = -0,0101$  et approche  $\frac{-3\Delta m_-}{m_T} = -0,0120$ .

Ce résultat est très intéressant et apporte à l'analyse non destructive un nouvel outil applicable sans contraintes à tous les systèmes dynamiques discrets pouvant subir n'importe quel modification de leurs masses. Nous généralisons cette théorie dans la conclusion.

## 8.4 Conclusion

Au cours de cette étude, nous avons cherché à vérifier que grâce à la variation relative des fréquences, on est capable d'approcher la valeur de la variation relative de la masse. Trois séries d'essais numériques ont été effectuées. La première pour des systèmes ayant subi des augmentations  $\Delta m_+$  de la masse sur une ou plusieurs masses locales. Toutes les  $k$  variations relatives des fréquences pour ces cas telles que  $k \in \{1, \dots, n\}$  vérifient :

$$0 \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{\sum \Delta m_+}{m_T} \quad (8.19)$$

La deuxième série d'essais montre que suite à  $p$  diminutions  $\Delta m_-$  de la masse sur une ou plusieurs masses locales, les  $k$  variations relatives des fréquences, pour  $k \in \{1, \dots, n - p\}$ , sont limitées par :

$$\frac{-\sum \Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq 0 \quad (8.20)$$

Le troisième essai numérique montre les résultats des variations relatives des fréquences d'un système ayant subi des augmentations  $\Delta m_+$  sur deux masses locales et des diminutions  $\Delta m_-$  sur trois masses locales à la fois et qui vérifient :

$$\frac{-2\Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{3\Delta m_+}{m_T} \quad (8.21)$$

pour  $k \in \{1, \dots, n - 3\}$ .

Sur ce point, il est intéressant de noter que, si les fréquences sont ordonnées selon un ordre croissant, nous observons qu'en général, les variations relatives des fréquences  $\left| \frac{-\Delta f_k}{f_k} \right|$  tendent à diminuer pour les fréquences élevées. Ce sont les premières fréquences qui permettent une meilleure évaluation de la variation relative de la masse. C'est aussi celles qui seront les plus facilement calculables lors d'une procédure inverse (expérimentalement).

En conclusion, les basses fréquences ont une variation relative qui dépend de la variation relative de la masse totale. De plus, ce qui est encore plus intéressant de point de vue des ingénieurs est la conjecture que, si  $\sum \Delta m_+$  représente la somme des  $q$  augmentations des masses locales, et si



$\sum \Delta m_-$  représente celle des  $p$  diminutions des masses locales, ainsi, les variations relatives des fréquences vérifient la relation suivante :

$$\frac{-\sum \Delta m_-}{m_T} \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{\sum \Delta m_+}{m_T} \quad (8.22)$$

pour  $k \in \{1, \dots, n - p\}$ .

Jusqu'à présent, nous avons vérifié numériquement les méthodes pour résoudre les 3 étapes :

- Étape 1 : la localisation en temps de la modification de la masse, dans le chapitre 6,
- Étape 2 : la détection de la position de la modification de la masse, dans le chapitre 7,
- Étape 3 : la quantification de la modification de la masse, dans ce chapitre.

Notre but dans le chapitre suivant consiste à vérifier expérimentalement l'efficacité des méthodes utilisées pour résoudre les étapes 2 et 3. Vu que l'évolution de la masse effectuée expérimentalement n'est pas continue, nous ne traitons pas l'étape 1.

## Chapitre 9

# Mise en œuvre expérimentale

---

**N**OUS CHERCHONS dans ce chapitre à tester l'efficacité de toutes les méthodes développées dans cette thèse sur un système expérimental. Nous utilisons un dispositif ayant la forme d'un bâtiment à cinq étages. En effectuant différents essais pour plusieurs ajouts de masse, nous testons les méthodes de détection de la position ainsi que la méthode de quantification de la modification de masse.

---

---

 PLAN DU CHAPITRE 9
 

---

<b>9.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>9.2</b>	<b>Description de l'expérience</b>	<b>117</b>
<b>9.3</b>	<b>Analyse des données de mesure</b>	<b>120</b>
<b>9.4</b>	<b>Recherche de la position de l'ajout de la masse</b>	<b>125</b>
9.4.1	Un ajout de masse de 2,5 % de la masse totale	126
9.4.2	Un ajout de masse de 5 % de la masse totale	130
9.4.3	Un ajout de masse de 7,5 % de la masse totale	130
9.4.4	Variation de l'étage d'excitation	132
<b>9.5</b>	<b>Estimation de la variation relative de la masse</b>	<b>132</b>
9.5.1	Un ajout de 12 % de la cinquième masse	133
9.5.2	Un ajout de 25 % de la deuxième masse	134
9.5.3	Un ajout de 38 % de la quatrième masse	135
9.5.4	Trois ajouts de 12 % chacun	136
<b>9.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>137</b>

---

## 9.1 Introduction

Dans le but de vérifier la pertinence des méthodes qui ont été présentées précédemment et de les tester sur des données expérimentales, nous allons utiliser un dispositif qui a été déjà utilisé au laboratoire pour étudier les réactions d'un bâtiment lors d'un séisme. C'est une maquette qui représente un bâtiment de cinq étages. Les cinq dalles de chaque étage sont reliées par des lames métalliques représentant les parois. Cet ensemble constitue un système dynamique linéaire à 5 degrés de liberté (d.d.l) qui est régi par un système d'équations du type (2.5). Ce système vérifie les hypothèses de notre étude tout au long de cette thèse.

Les essais vont consister à taper avec un marteau sur un des étages, ce qui va exciter tous les modes propres de ce système. Cette opération sera répétée plusieurs fois en frappant sur des étages différents mais surtout en modifiant la masse des étages. L'exploitation des essais expérimentaux repose sur la comparaison entre les mesures vibratoires des accélérations du système initial et celles obtenues après une augmentation de la masse. Le problème expérimental proposé est donc, en un premier temps, de mesurer les données du système à 5 masses initiales vibrant sous l'impact d'une force extérieure latérale exercée sur l'une de ces masses. Puis, en un second temps, nous ajoutons de la masse au niveau de l'un de ces étages et nous mesurons les données correspondantes aux oscillations de chacun des 5 étages.

Vu que la réponse vibratoire mesurée avant et après un ajout de masse est enregistrée au cours de deux intervalles de temps indépendants, le signal total n'est pas continu. Ainsi, la détection de l'instant de la modification de masse en utilisant la TO (qui consiste l'étape 1 de notre étude) n'est pas possible dans notre cas expérimental. Par contre, nous pouvons calculer le taux d'amortissement des accélérations des masses du système avant puis après un ajout de masse en utilisant la TO comme il est décrit dans le paragraphe 4.5 du chapitre 4.

Notre but dans ce chapitre sera ainsi de vérifier expérimentalement si nous sommes capables de déterminer la position de la variation de la masse à partir des données mesurées avant et après l'ajout de la masse, à l'aide des méthodes présentées auparavant (étape 2). La recherche de la position de l'ajout de la masse consiste à trouver l'étage soumis à ce changement de masse en utilisant les données mesurées avec des capteurs d'accélérations. Nous cherchons de même à vérifier la relation, étudiée au chapitre 8, entre la variation relative des fréquences et celle de la masse (étape 3 de notre étude).

Dans le paragraphe 9.2, nous décrivons tout d'abord l'expérience faite au sein de l'École des Ponts ParisTech avec Gwendal CUMUNEL et Nelly POINT. Ensuite, dans le paragraphe 9.3 nous décrivons la série d'essais effectuée et traitons les données de mesures. En outre, pour enrichir et démontrer la pertinence du résultat, nous testons l'efficacité des trois méthodes développées dans le chapitre 7, expérimentalement, dans le paragraphe 9.4 et nous calculons par la TO l'amortissement de chaque accélération. Enfin, les résultats de la quantification de la variation relative de la masse par la variation relative des fréquences sont présentés dans le paragraphe 9.5.

## 9.2 Description de l'expérience

Nous disposons d'un mécanisme qui a la forme d'un bâtiment composé de 5 étages (donc 5 masses - en  $kg$ ) et liés par quatre lames comme le montre la figure (9.1). Ce dispositif était déjà monté au laboratoire et nous décidons donc d'en profiter et de nous en servir pour vérifier expérimentalement les méthodes proposées et déjà testées sur des données numériques.

Pour l'étude expérimentale, nous choisissons d'analyser le comportement de ce bâtiment soumis à des oscillations et ayant subi un changement de la masse au niveau de l'un de ses étages. Au cours de cette expérience, une force extérieure latérale est exercée au niveau de l'un des étages du bâtiment dans les deux états : état avant l'ajout de la masse et état après l'ajout de la masse. Pour notre étude, l'analyse du comportement vibratoire de ce bâtiment a pour but la localisation du changement de la masse, c'est-à-dire l'identification de l'étage concerné et la quantification de la variation relative de la masse au cours du temps.

Décrivons dans ce paragraphe ce dispositif, le matériel et la matrice caractérisant l'état initial du système.

Nous travaillons avec un système dynamique à 5 d.d.l ayant pour matrice de masse  $\mathbf{M}_{av}$  une matrice diagonale dont les termes correspondent à la masse  $m_i$  de chaque étage et qui est donnée par :

$$\mathbf{M}_{av} = \begin{pmatrix} 2,4551 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4579 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4578 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,4493 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4521 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

La masse totale du système est :

$$\text{Masse totale} = \sum_{i=1}^5 m_i + \text{masse des lames} = 12,2722 + 0,18741 = 12,4596 \text{ kg} \quad (9.2)$$

Rappelons que la réaction d'une construction aux secousses sismiques du sol est caractérisée par les accélérations, les vitesses et les déplacements de ses éléments. Pour cela on dispose, pour la série d'essais effectuée, de 5 capteurs d'accélération fixés à chaque étage (figure (9.2)), d'un marteau à embout souple pour exercer une force extérieure (figure (9.3)) et d'un capteur de déplacement laser fixé au 5<sup>ème</sup> étage. Les capteurs et le marteau sont tous branchés à une carte d'acquisition comme indiqué dans la figure (9.4).

Le principe de ces expérimentations consiste à taper latéralement avec le marteau sur un étage de manière à créer l'effet vibratoire du système. Les signaux délivrés par les capteurs accélérométriques sont des mesures faites de façon discrète et ayant un pas de temps constant. Les signaux sont enfin enregistrés dans une matrice appelée matrice des données de mesures. Cette matrice contient, entre autre, la matrice des accélérations de chaque étage à l'état initial. En ajoutant de la masse au niveau de l'un des étages, la matrice des données mesurées correspond aux mesures après l'ajout de la masse.

Dans la suite, nous traitons les deux matrices de mesures avant et après un ajout de masse pour la série d'essais étudiée afin d'extraire le temps d'observation, l'accélération de chacun des 5 étages et le déplacement du 5<sup>ème</sup> étage dans le paragraphe 9.3. Nous vérifions enfin la validité expérimentale des trois méthodes de détection de la position de la variation de la masse dans le paragraphe 9.4. Nous calculons ensuite les amortissements des accélérations de quelques cas ainsi que la quantification de la variation relative de quelques ajouts de masses dans le paragraphe 9.5.

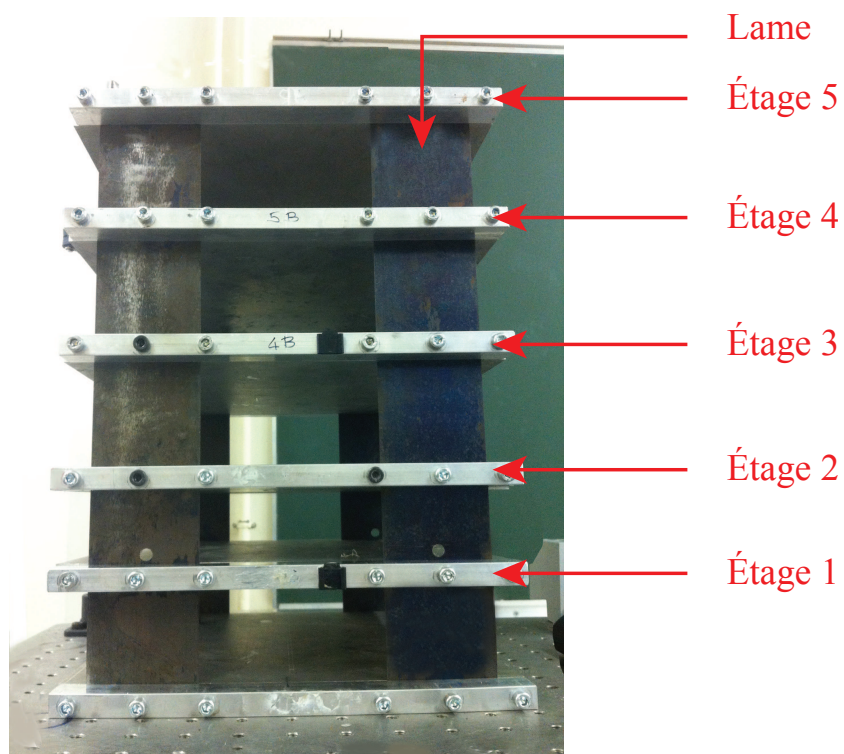


FIGURE 9.1. Dispositif composé de 5 étages liés par des lames.

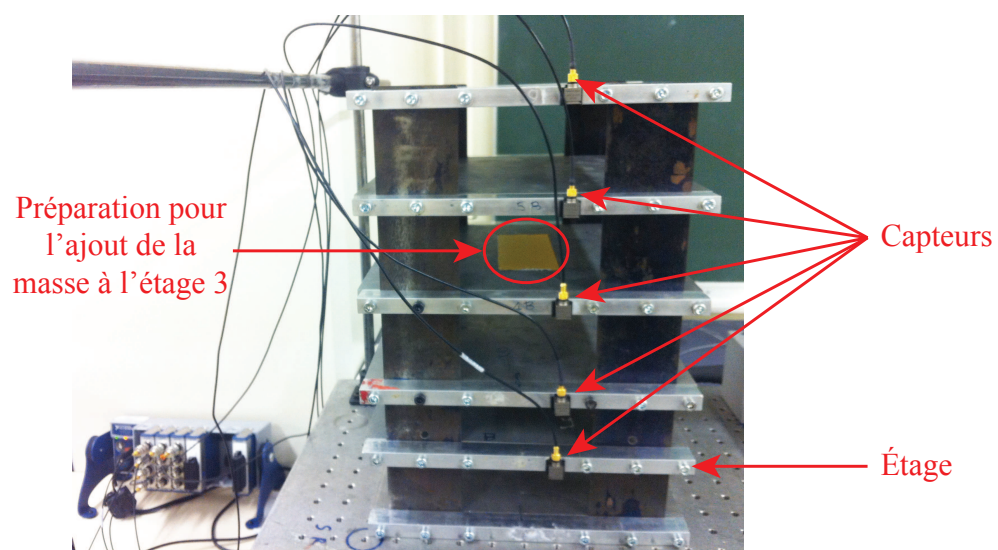


FIGURE 9.2. Cinq capteurs d'accélération attachés à chaque étage.



FIGURE 9.3. Marteau utilisé pour engendrer la force extérieure.

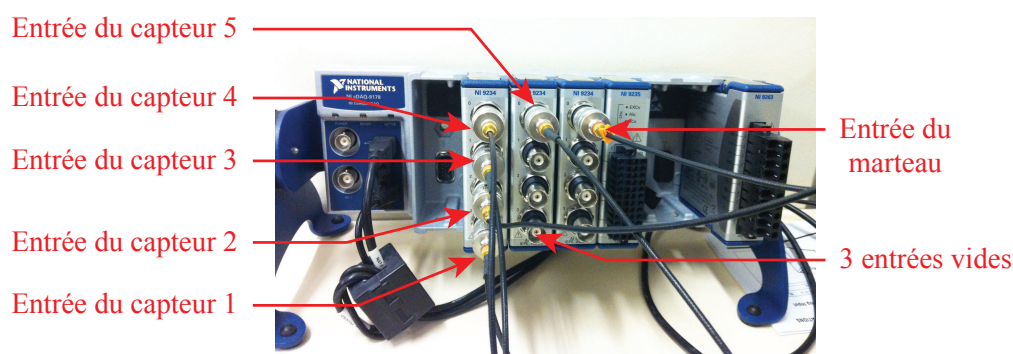


FIGURE 9.4. La carte d'acquisition avec des modules de 4 entrées chacun.

### 9.3 Analyse des données de mesure

Au cours de notre étude expérimentale, une série de 52 essais a été effectuée sur le dispositif décrit dans le paragraphe précédent. Pour chacun des essais, une force d'excitation est exercée latéralement avec le marteau à embout souple.

Nous disposons de trois valeurs différentes d'ajouts de masses telles que :

$$\begin{aligned}
 \Delta m_1 &= 0,30948 \text{ kg} \\
 \Delta m_2 &= 0,62003 \text{ kg} \simeq 2\Delta m_1 \\
 \Delta m_3 &= 0,93328 \text{ kg} \simeq 3\Delta m_1
 \end{aligned}
 \tag{9.3}$$

Les essais après l'ajout de la masse consistent ainsi à effectuer les 3 types de changement de masse successivement sur chacun des 5 étages. En exerçant un choc sur le troisième étage, nous effectuons à chaque fois trois essais identiques (*i.e.* en fixant l'étage et la valeur de l'ajout de la masse) mais en variant la force du choc. Au total, cette série est composée de 52 essais :

- 3 essais : avant tout ajout de masse,
- 45 essais :  $3 \times 5 \times 3$  essais après l'ajout de masses différentes sur chacun des étages,
- 4 essais : en fixant la valeur et l'étage de l'ajout de la masse et en variant l'étage excité. Ce choix a pour but de tester l'effet de l'excitation sur le comportement du système lorsqu'on change l'étage excité.

Pour une description plus claire, les essais différents effectués sont schématisés dans la figure (9.5).

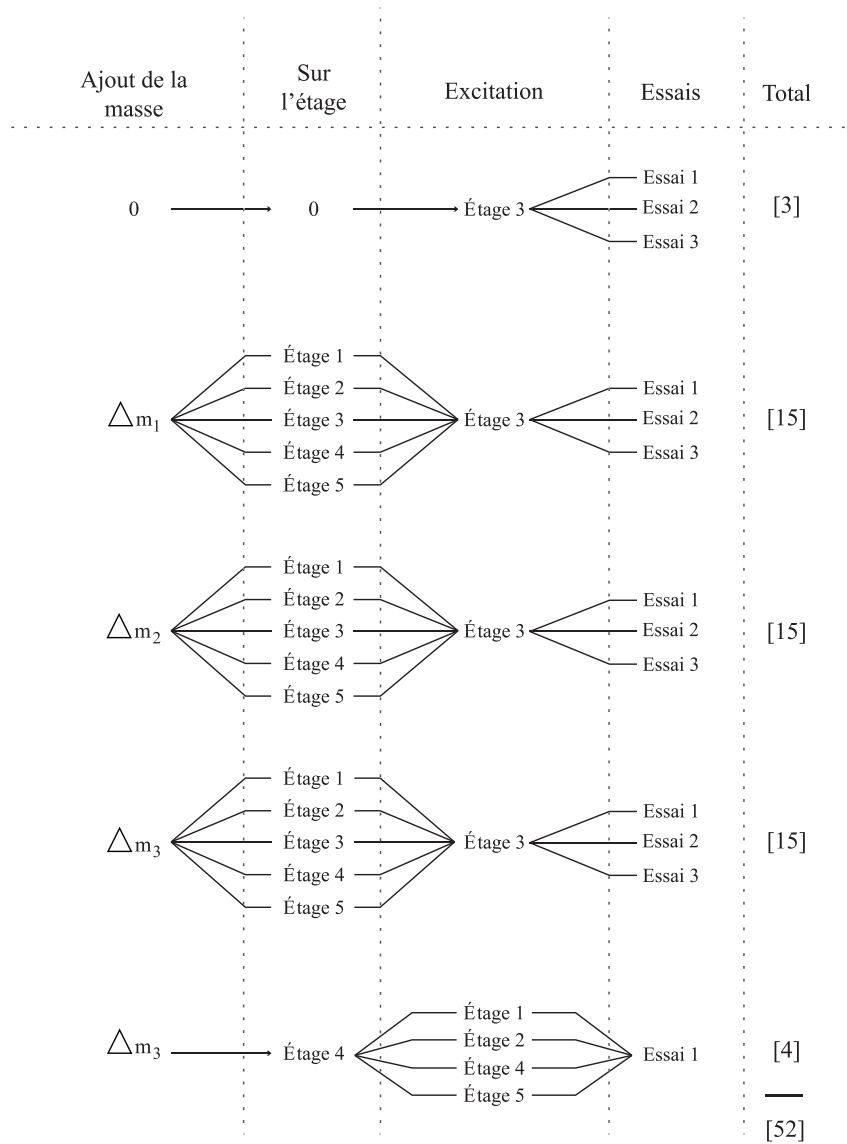


FIGURE 9.5. Les essais effectués suivant la valeur de l'ajout de la masse, la position de chaque ajout, l'étage d'excitation et le nombre d'essais.

Pour chacun de ces essais nous appliquons la FFT au signal vibratoire associé dans le but de calculer les 5 fréquences du signal. Les fréquences récupérées sont données dans l'annexe C.

On tape avec le marteau sur un des étages pour exciter tous les modes et on mesure, à l'aide des capteurs, les accélérations de chaque étage. La matrice des données de mesures est ainsi formée



par des vecteurs lignes composés chacun de 49560 éléments représentant les échantillons en temps.

La matrice de masse initiale  $\mathbf{M}_{av}$  avant tout ajout de masse est donnée dans l'équation (9.1) et la matrice de masse  $\mathbf{M}_{ap}$  après l'ajout de la masse dépend de la position et de la valeur de chaque ajout de masse.

Le pas d'échantillonnage constant est donné par  $\Delta t = 5,86 \times 10^{-4}$  s. Le vecteur des fréquences en  $Hz$  fourni par le logiciel est présenté comme suit :

$$\mathbf{f}_{av} = \begin{pmatrix} 2,27 \\ 6,16 \\ 9,64 \\ 12,67 \\ 18,33 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

On récupère ainsi la matrice des données de mesures qui est de dimension  $7 \times 49560$  et on déduit le temps d'observation total  $T_{av} = 49560 \times \Delta t = 29,04$  s.

La matrice des données de mesures est composée de 7 vecteurs lignes de 49560 échantillons chacun : un vecteur force, un vecteur de déplacement et cinq vecteurs d'accéléérations.

Le tracé du vecteur force est montré dans la figure (9.6). Celui-ci forme un pic environ à l'instant 0,6 s et s'annule ailleurs. On en déduit que ce signal ressemble à un dirac décrivant la force exercée par le marteau 0,6 secondes après le début de l'enregistrement.

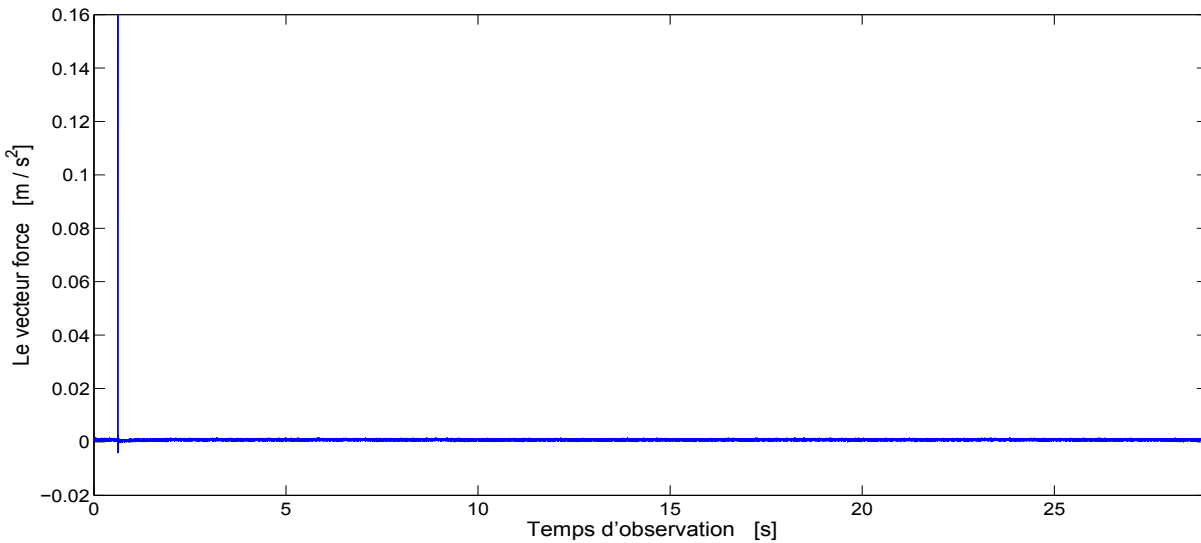


FIGURE 9.6. Tracé de la courbe du vecteur force en fonction du temps d'observation en secondes.

Ensuite, le vecteur de déplacement du cinquième étage enregistré avec le capteur de déplacement laser est tracé dans la figure (9.7).

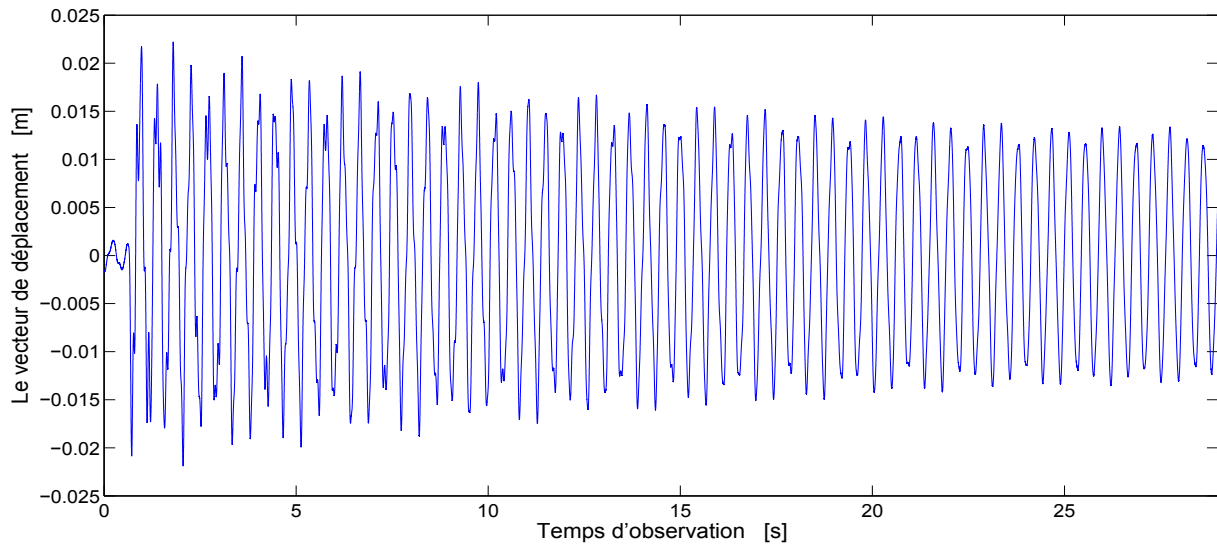


FIGURE 9.7. *Tracé de la courbe du vecteur de déplacement du cinquième étage en fonction du temps d'observation enregistré à l'aide du capteur laser.*

Enfin, le tracé de chacun des cinq vecteurs d'accélération de chacun des cinq étages est présenté dans la figure (9.8). On note ici que l'allure de la courbe correspondant à l'étage 3 commence par un pic à l'instant de l'impact du marteau puis continue à vibrer normalement. Dans cette figure, les accélérations des cinq masses sont tracés après l'impact du marteau pour montrer le comportement vibratoire de chacune.

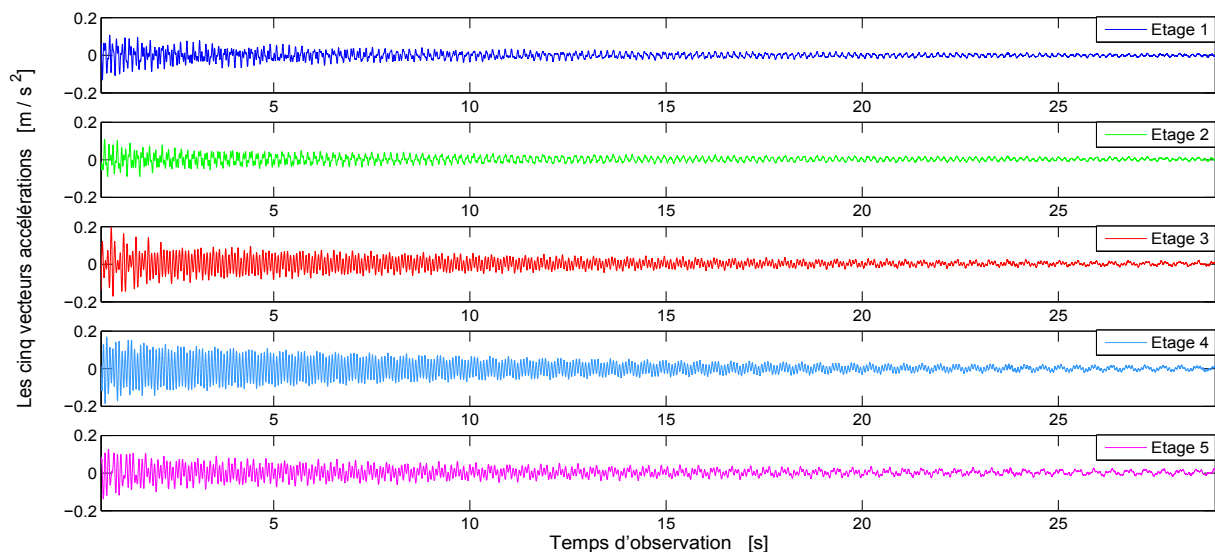


FIGURE 9.8. *Tracé des courbes des vecteurs d'accélération de chacun des 5 étages en fonction du temps d'observation.*

Ainsi, il est utile de noter que des points sont enregistrés au début de l'observation avant le choc du marteau, ce qui peut affecter négativement le résultat de la recherche de la position. Pour cela, nous cherchons tout d'abord le nombre de points à enlever du début du signal pour assurer

la stabilisation de la variation du système avant l'ajout de la masse. Dans la figure (9.9), nous traçons le premier vecteur de la matrice des réponses représentant l'accélération du premier étage. En zoomant sur le début du signal, nous pouvons remarquer la vibration très faible de l'étage avant l'impact du marteau. Cette vibration, due aux perturbations extérieures, est détectée au cours des premiers 1200 points environ. Pour cela, et pour assurer une bonne étude des données mesurées, nous considérons seulement les points enregistrés après le choc du marteau.

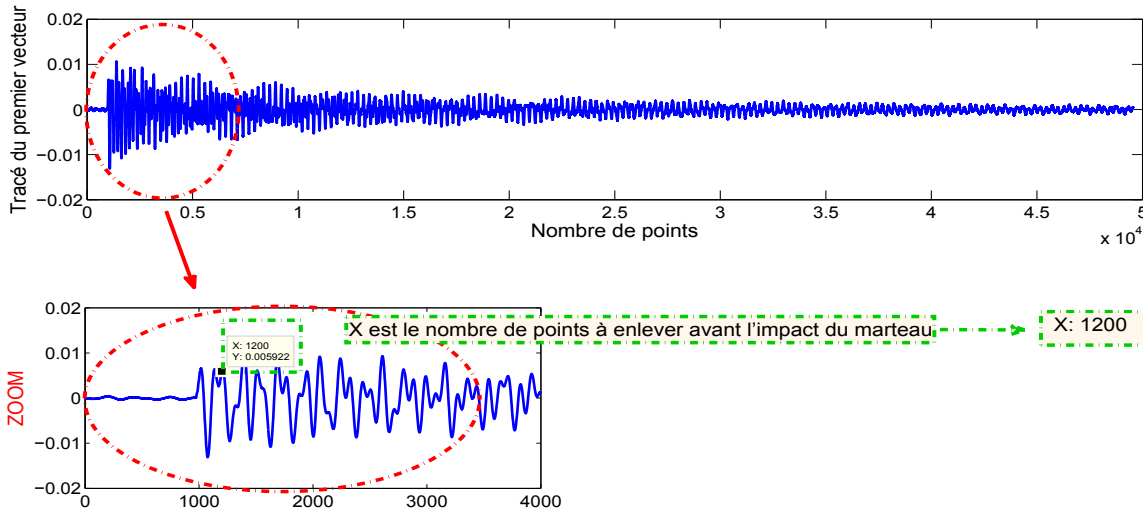


FIGURE 9.9. Nombre de points à enlever avant l'impact du choc.

Par conséquent, la matrice de réponse avant le changement de masse  $\mathbf{X}_{av}$  est donc constituée par les 5 vecteurs accélérations de la matrice des données de mesure pour les derniers 48360 échantillons et sera donc de dimension  $5 \times 48360$ . La même démarche est utilisée pour l'étude des données de mesure après chaque ajout de la masse pour récupérer la matrice de réponse  $\mathbf{X}_{ap}$ .

Pour chercher l'amortissement des vibrations accélératoires de chaque étage pour les 3 essais, nous appliquons la TO au signal de la matrice  $\mathbf{X}_{av}$  et nous présentons les résultats dans la figure (9.10).

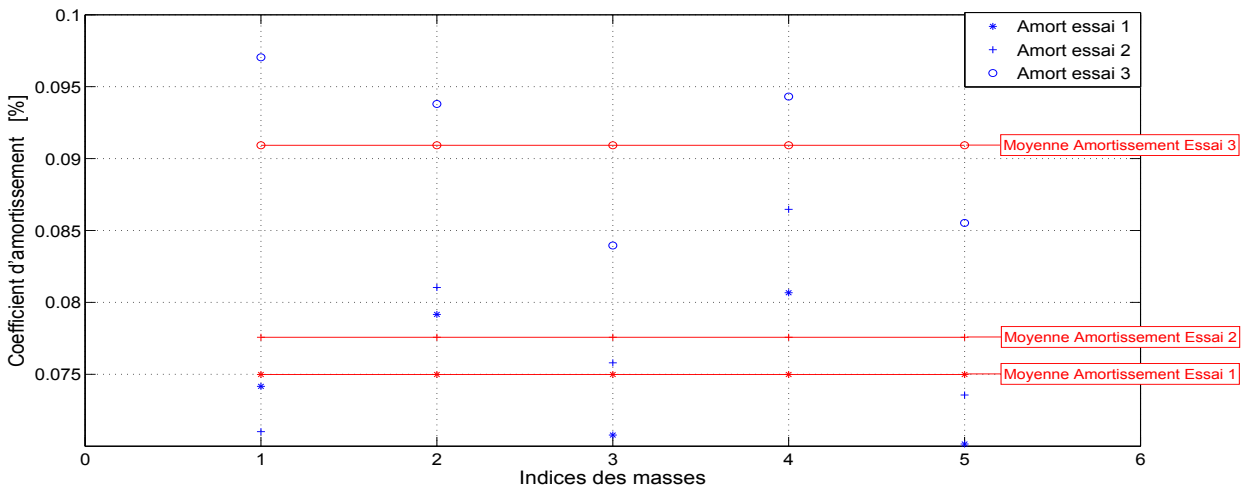


FIGURE 9.10. Coefficient d'amortissement en pourcentage de chaque accélération pour les trois essais.

Dans la figure (9.10) nous présentons l'amortissement de chacune des cinq masses pour les trois essais. Nous présentons de plus l'amortissement moyen des 5 masses pour les 3 essais. Il est remarquable que chaque taux d'amortissement est strictement inférieur à 0.1%. Nous rappelons ici que le taux d'amortissement dépend naturellement de la force extérieure exercée aux masses. Notons aussi que l'amortissement est faible vu que les masses sont liées par des lames en acier assurant une faible vibration de la structure.

## 9.4 Recherche de la position de l'ajout de la masse

Notre but dans ce paragraphe est de trouver la position correspondante à l'étage ayant subi un ajout de masse. Pour cela, nous utilisons les méthodes développées dans le chapitre 7 pour la recherche de la position du changement de la masse et qui se basent sur la variation des modes propres avant et après l'ajout de la masse.

Après la permutation des modes propres calculés en utilisant la méthode du MAC [30], nous calculons les deux matrices des modes propres permutés  $PermPOM_{av}$  et  $PermPOM_{ap}$  avant et après l'ajout de la masse. Comme déjà défini dans le paragraphe 7.2 du chapitre 7,  $\Delta = |PermPOM_{av} - PermPOM_{ap}|$  représente la matrice des valeurs de l'écart entre les POMs. Dans notre cas,  $\Delta$  est de dimension  $5 \times 5$  puisque nous travaillons avec un système à 5 d.d.l. Ainsi, nous cherchons les 5 valeurs maximales de chacun des 5 vecteurs colonnes de  $\Delta$  et leur indice correspondant. Notons  $Max$  le vecteur ligne de dimension 5 composé des 5 valeurs maximales et  $Ind$  le vecteur ligne de dimension 5 contenant les 5 indices. La  $i^{\text{ème}}$  valeur du vecteur  $Ind$  correspond à la position détectée entre le  $i^{\text{ème}}$  mode de  $PermPOM_{av}$  et le  $i^{\text{ème}}$  mode de  $PermPOM_{ap}$ . Le cas idéal serait de trouver la position 3 par exemple (le numéro de l'étage ayant subi un ajout de masse) sur chaque valeur de l'écart dans le vecteur  $Max$ .

Ayant trouvé les deux vecteurs  $Max$  et  $Ind$ , nous appliquons les trois méthodes discutées dans le chapitre 7 et présentées dans la figure (9.11) dans le cas où ces méthodes sont exactes. La première méthode (a), OI, se base sur la détection de la position suivant l'occurrence des indices de  $\Delta$ , la deuxième (b), EC, sur l'amplitude des écarts cumulés et la troisième méthode (c), EM, sur l'écart maximal.

Au cours de cette série expérimentale, nous disposons de trois valeurs différentes de  $\Delta m$ . En tapant latéralement sur le troisième étage avec le marteau on excite tous les modes (ceci a été testé expérimentalement par plusieurs essais). Sachant que l'utilisation du marteau et la force associée dépendent de l'expérimentateur, 3 essais identiques sont effectués à chaque test.

On considère tout d'abord  $\Delta m_1 = 0,30948 \text{ kg}$ ,  $\Delta m_2 = 0,62003 \text{ kg}$  et  $\Delta m_3 = 0,93328 \text{ kg}$  trois valeurs différentes de l'ajout de la masse. En fixant à chaque essai l'étage et la valeur de son ajout de masse, nous enregistrons 3 fois les résultats oscillatoires des étages en variant la force du marteau exercée par l'expérimentateur sur le troisième étage. On dispose ainsi de 15 essais pour l'ajout de la valeur  $\Delta m_1$ , 15 essais pour  $\Delta m_2$  et 15 autres pour  $\Delta m_3$ . Les résultats de la détection de l'étage concerné à chaque ajout de masse sont présentés dans les paragraphes 9.4.1, 9.4.2 et 9.4.3.

Enfin, dans le paragraphe 9.4.4, on choisit un différent type d'étude. On se base sur le cas ayant un ajout de masse au niveau du quatrième étage tel que  $\Delta m_3 = 0,93328 \text{ kg}$ . Sachant qu'avec le marteau on a tapé latéralement sur chacun des 5 étages, on possède pour le même cas cinq excitations différentes. À noter que pour la troisième excitation, trois essais à force différente

sont enregistrés. Alors, on obtient 7 essais au total pour l'ajout de  $\Delta m_3$  au niveau du quatrième étage.

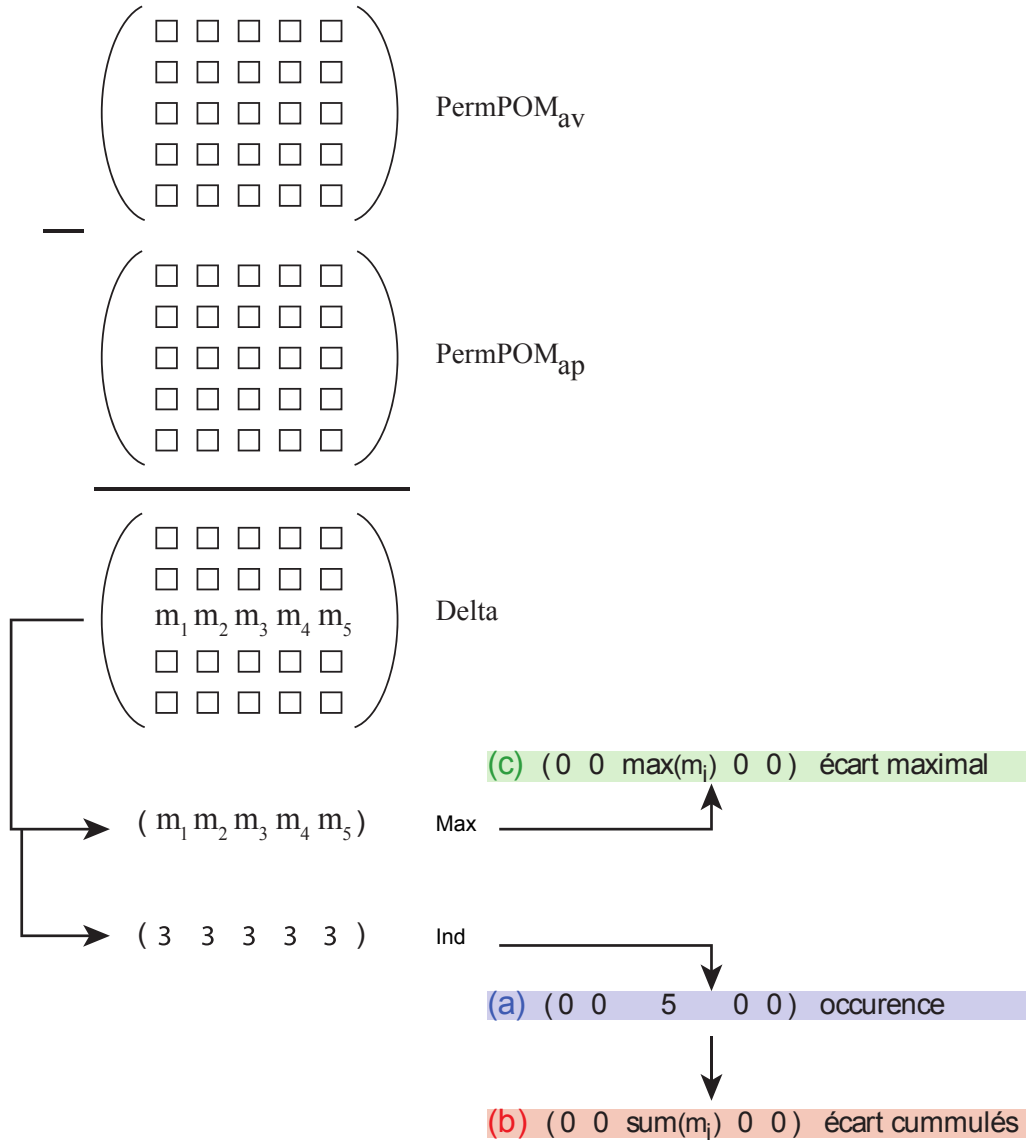


FIGURE 9.11. Cas idéal pour la détection de la position 3 du changement de la masse en utilisant les résultats de la méthode OI, de la méthode EC et de la méthode EM.

#### 9.4.1 Un ajout de masse de 2,5 % de la masse totale

Notre but dans ce paragraphe est de comparer les données mesurées avant et après l'ajout de la masse  $\Delta m_1 = 0,30948 \text{ kg}$  sur chacun des 5 étages indépendamment. Cet ajout de masse forme environ 12,6 % de la masse locale d'un étage. Rappelons tout d'abord que tous les essais effectués dans ce paragraphe consistent à taper latéralement avec le marteau sur le troisième étage.

Pour commencer, nous ajoutons la masse  $\Delta m_1$  à l'étage 1 et nous présentons les résultats des 3 essais effectués dans la figure (9.12). Puisqu'on a ajouté la masse  $\Delta m_1$  à l'étage 1, on espère détecter la position 1, ce qui est le cas d'après les méthodes OI, EC et EM des essais 1 et 2 et la

méthode OI de l'essai 3. La figure (9.13) représente les résultats trouvés après l'ajout de la masse  $\Delta m_1$  à l'étage 2. Grâce aux méthodes EC et EM appliquées à l'essai 2 on est capable de trouver la bonne position 2. Après l'ajout de la masse au niveau du troisième étage, l'utilisation des méthodes OI et EC permet la détection de la position 3 d'après la figure (9.14) pour les 3 essais. Or, l'ajout de la masse à l'étage 4 n'a été détecté par aucune des trois méthodes et pour aucun des essais comme le montre la figure (9.15). Enfin, de la figure (9.16), on déduit que les trois méthodes sont capables de détecter la position 5 de l'ajout de la masse pour les essais 2 et 3 seulement.

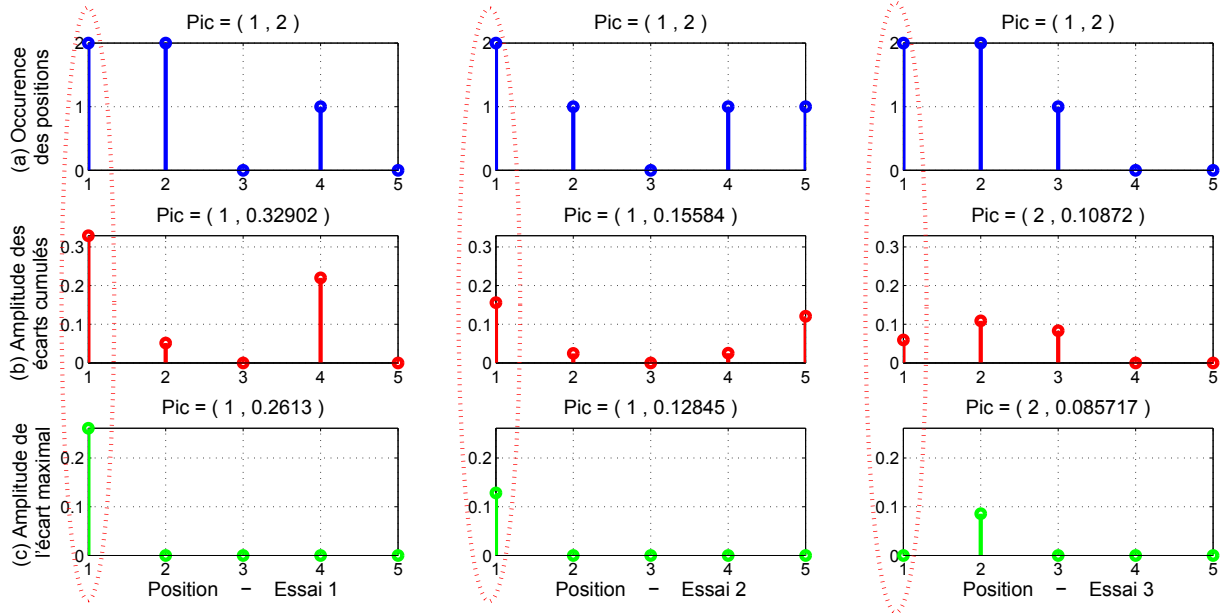


FIGURE 9.12. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur le premier étage et en tapant sur le troisième étage.

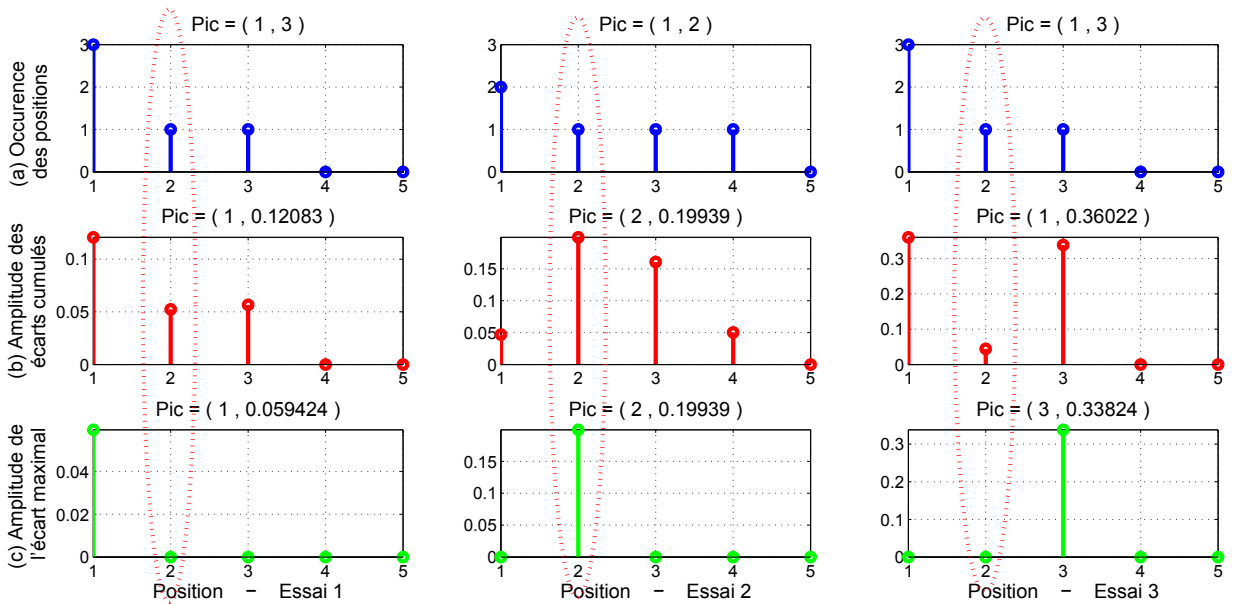


FIGURE 9.13. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur le deuxième étage et en tapant sur le troisième étage.

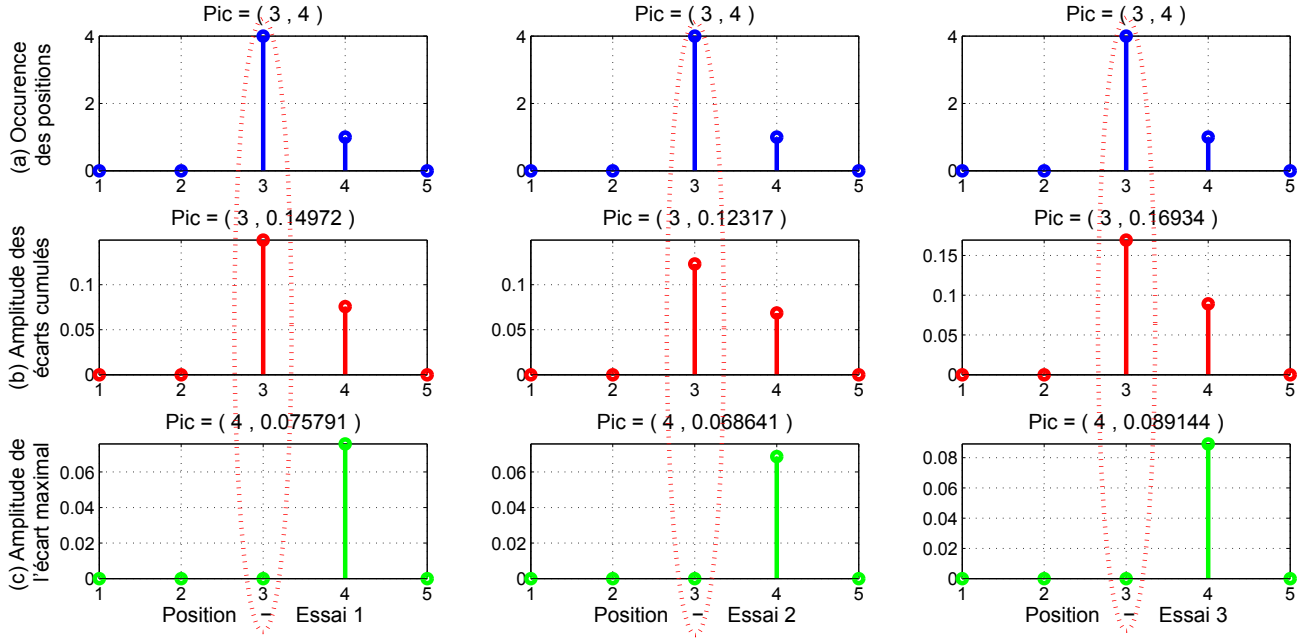


FIGURE 9.14. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur le troisième étage et en tapant sur le troisième étage.

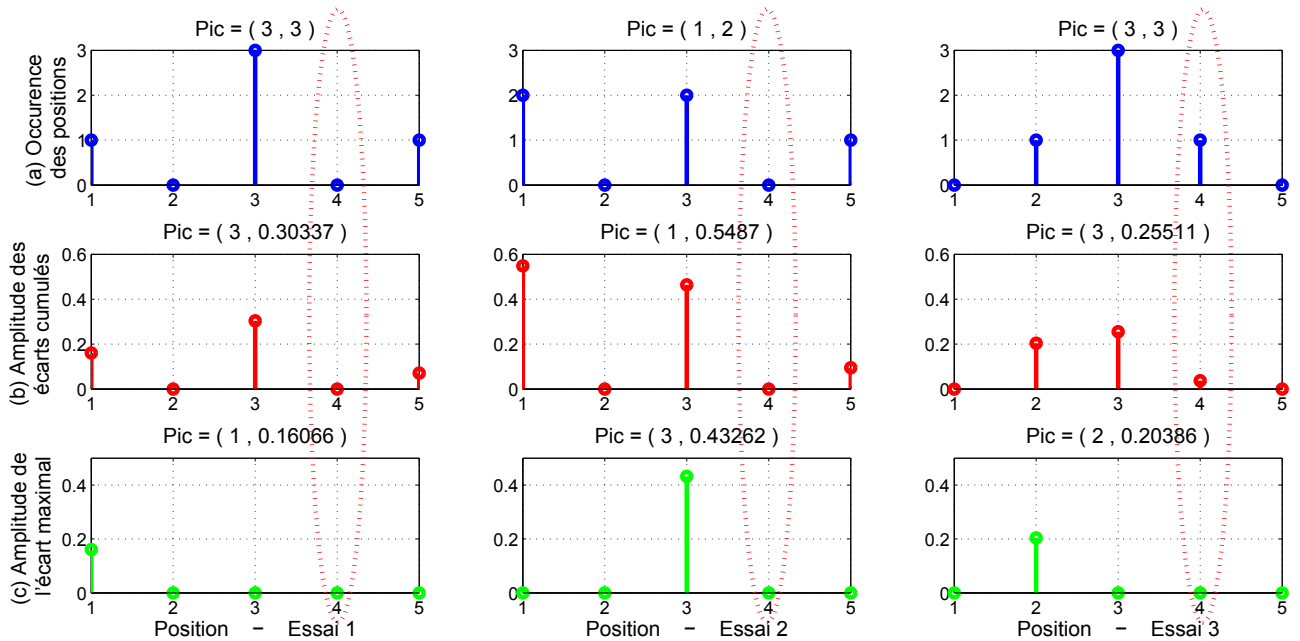


FIGURE 9.15. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur le quatrième étage et en tapant sur le troisième étage.

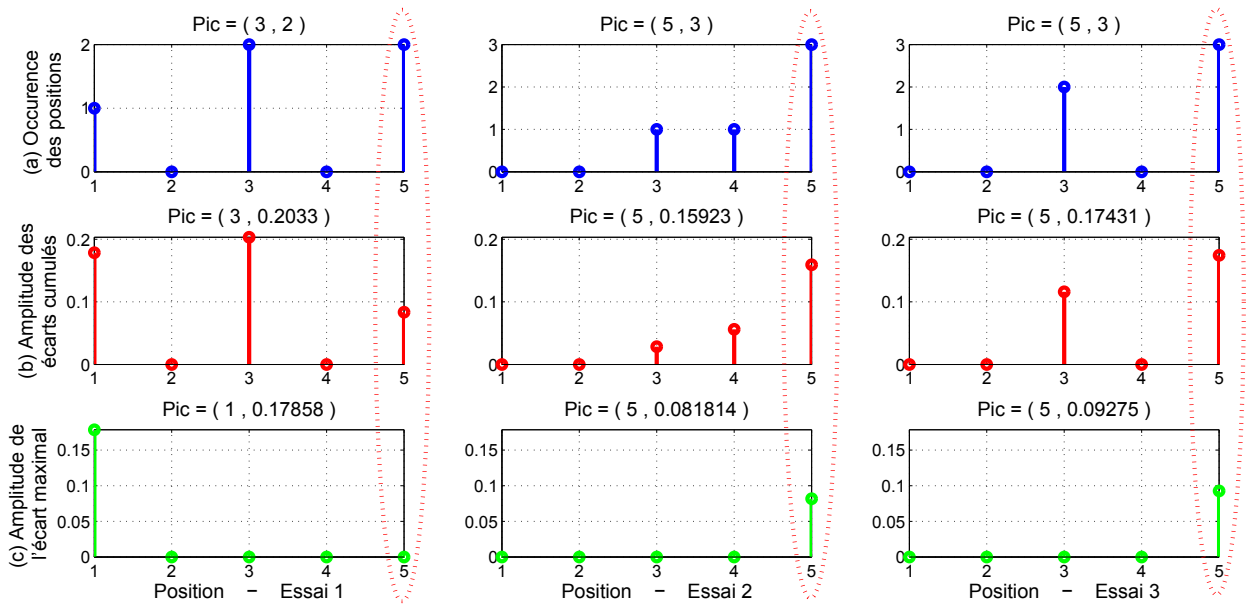


FIGURE 9.16. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur le cinquième étage et en tapant sur le troisième étage.

Le tableau (9.1) montre la probabilité correspondant à l'efficacité de chacune des trois méthodes OI, EC et EM dans la détection de la position du changement de la masse pour les essais enregistrés lors de l'ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur chacun des 5 étages en tapant sur le troisième étage. On en déduit que les méthodes OI et EC détectent dans 53,3 % des essais la bonne position du changement de la masse, alors que la méthode EM a une probabilité de 33,3 % de trouver l'étage ayant subi l'ajout expérimental de la masse. Il est à noter que  $\Delta m_1$  est très petit (environ 2,48 % de la masse totale) et donc il est normal que la probabilité de la bonne détection de la position ne soit pas très élevée. Pour cela, nous présentons dans le paragraphe suivant les résultats obtenus, après l'ajout de masse  $\Delta m_2$  qui vaut le double de  $\Delta m_1$ .

EXCIT = 3						
$\Delta m_1$						
	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	
Méthode (a)	3/3	0/3	3/3	0/3	2/3	53,3 %
Méthode (b)	2/3	1/3	3/3	0/3	2/3	53,3 %
Méthode (c)	2/3	1/3	0/3	0/3	2/3	33,3 %

TABLEAU 9.1. Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout  $\Delta m_1$  sur chacun des cinq étages successivement et en tapant sur le troisième étage.



### 9.4.2 Un ajout de masse de 5 % de la masse totale

Malgré l'ajout d'une très petite valeur de masse, les résultats expérimentaux présentés dans le paragraphe 9.4.1 montrent que grâce aux méthodes de détection, nous sommes capables de déduire la plupart du temps la bonne position de l'ajout de la masse. Dans ce qui suit, nous choisissons d'ajouter la masse  $\Delta m_2 = 0,62003 \text{ kg}$ , c'est à dire environ 25,25 % de la masse locale ce qui correspond à 5 % de la masse totale. Ces essais sont aussi réalisés en changeant successivement l'étage ayant subi l'ajout  $\Delta m_2$  et en tapant sur le troisième étage.

Pour les 15 essais étudiés dans ce paragraphe, on a à peu près doublé la valeur de la masse ajoutée à chacun des cinq étages. Les résultats obtenus pour chacun de ces essais, ayant le même principe que ceux du paragraphe précédent, sont montrés dans le paragraphe D.1 de l'annexe D.

Dans le tableau (9.2), nous montrons en pourcentage la probabilité de la détection de la bonne position de l'ajout de la masse d'une valeur  $\Delta m_2$  qui vaut environ un ajout de 5 % de la masse totale du système. On en déduit que les méthodes OI et EM sont capables de détecter la bonne position dans 66,6 % des essais, alors que la méthode EC s'avère précise pour 80 % des essais effectués.

On remarque que la probabilité de succès de chacune des trois méthodes a augmenté en augmentant la valeur de l'ajout de la masse. Ainsi, nous proposons de développer un troisième test dans le paragraphe 9.4.3 en ajoutant le triple de  $\Delta m_1$  à chacun des 5 étages.

EXCIT = 3						
$\Delta m_2$						
	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	
Méthode (a)	3/3	1/3	2/3	1/3	3/3	66,6 %
Méthode (b)	3/3	2/3	2/3	2/3	3/3	80 %
Méthode (c)	3/3	3/3	1/3	2/3	1/3	66,6 %

TABLEAU 9.2. Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout  $\Delta m_2$  sur chacun des cinq étages successivement et en tapant sur le troisième étage.

### 9.4.3 Un ajout de masse de 7,5 % de la masse totale

L'ajout de la masse  $\Delta m_3 = 0,93328 \text{ kg}$  sur l'un des 5 étages correspond à un ajout de 38 % de la masse locale de chaque étage donc vaut 7,5 % de la masse totale du système.

Nous étudions dans ce paragraphe si, en augmentant encore plus la masse de l'un des étages, on est capable de trouver l'étage concerné en utilisant les mêmes méthodes et en suivant les mêmes démarches décrites précédemment. Les figures schématisant les résultats de ces trois méthodes pour les essais de cet ajout de masse sont montrées dans le paragraphe D.2 de l'annexe D.

L'objectif de l'ajout de la masse  $\Delta m_3$ , qui est environ le triple de la valeur de  $\Delta m_1$ , à chacun des cinq étages successivement, est de montrer que l'augmentation de la valeur de l'ajout de la

masse  $\Delta m$  entraîne des résultats plus pertinents sur la détection de la bonne position de cet ajout de masse. Nous montrons ceci dans le tableau (9.3) où, la méthode OI prouve une efficacité de 93,3 %, la méthode EC de 86,6 % et la méthode EM de 53,3 % des essais effectués.

EXCIT = 3						
$\Delta m_3$						
	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	
Méthode (a)	3/3	2/3	3/3	3/3	3/3	93,3 %
Méthode (b)	2/3	2/3	3/3	3/3	3/3	86,6 %
Méthode (c)	2/3	2/3	1/3	3/3	0/3	53,3 %

TABLEAU 9.3. Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout  $\Delta m_3$  sur chacun des cinq étages successivement et en tapant sur le troisième étage.

Les amortissements des accélérations des masses pour les trois essais après un ajout de  $\Delta m_3$  sur l'étage 4 sont présentés en discret en bleu dans la figure (9.17). De plus, dans cette figure, nous traçons en rouge l'amortissement moyen de chaque essai. Ces amortissements sont calculés par la TO. Ces résultats sont raisonnables car les lames sont en acier donc les masses sont faiblement amorties.

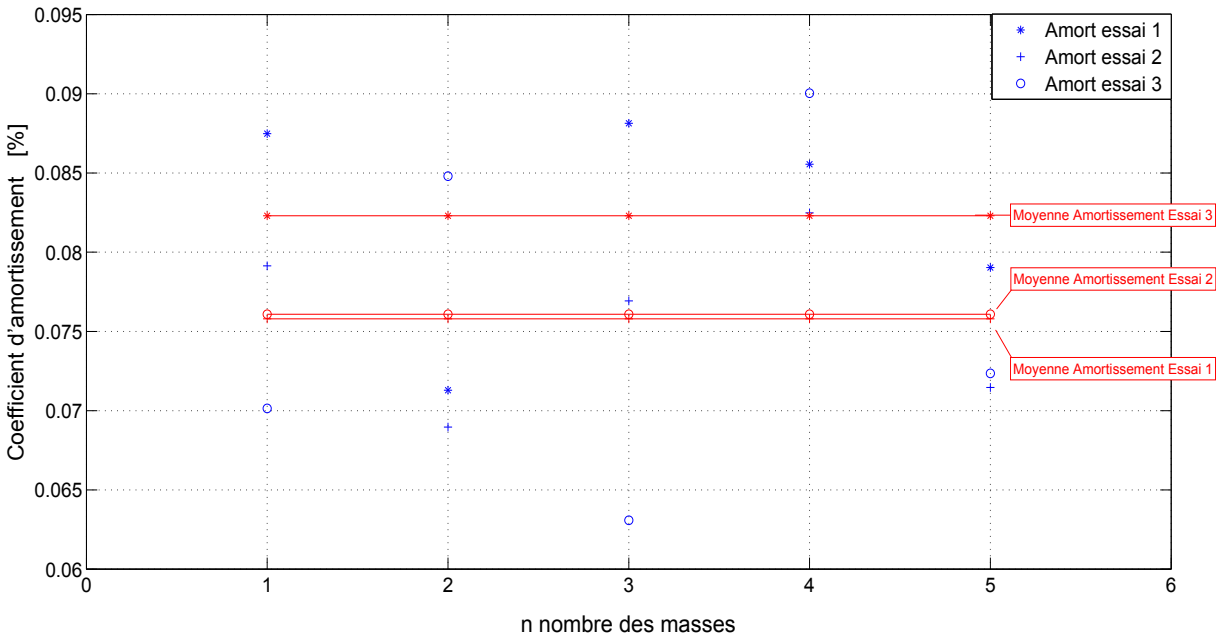


FIGURE 9.17. Coefficient d'amortissement en pourcentage, en bleu, des accélérations des masses du système ayant subi un ajout de  $\Delta m_3$  sur l'étage 4. En rouge, l'amortissement moyen entre les 5 masses pour chacun des trois essais.

Pour notre dernier test on propose cette fois de faire varier l'étage où le marteau fait son impact en fixant la valeur de l'ajout de la masse  $\Delta m_3 = 0,93328 \text{ kg}$  sur l'étage 4. Les résultats obtenus sont décrits dans le paragraphe 9.4.4.

#### 9.4.4 Variation de l'étage d'excitation

Dans ce dernier test, on choisit un différent type d'étude. On se pose dans le cas tel que, la valeur de l'ajout de la masse  $\Delta m_3 = 0,93328 \text{ kg}$  est fixée au quatrième étage et on effectue plusieurs essais en tapant latéralement sur chacun des 5 étages successivement. Ainsi, nous cherchons à vérifier que, grâce à ces trois techniques de détection, on est capable de déduire que le changement de la masse a été effectué au quatrième étage.

Comme pour les deux cas précédents, les figures schématisant la recherche de la position de l'ajout de la masse sont présentées dans le paragraphe D.3 de l'annexe D.

Nous trouvons dans le tableau (9.4) les résultats montrant que les trois méthodes OI, EC et EM sont capables de détecter 100 % des 7 essais effectués pour ce test. Les résultats statistiques de ces méthodes montrent une probabilité d'efficacité très satisfaisante dans ce cas.

Étage = 4						
$\Delta m_3$						
	Excit 1	Excit 2	Excit 3	Excit 4	Excit 5	
Méthode (a)	1/1	1/1	3/3	1/1	1/1	100 %
Méthode (b)	1/1	1/1	3/3	1/1	1/1	100 %
Méthode (c)	1/1	1/1	3/3	1/1	1/1	100 %

TABLEAU 9.4. Probabilité pour chacune des trois méthodes de trouver la bonne position de l'ajout  $\Delta m_3$  sur l'étage 4 et en tapant sur chacun des cinq étages successivement.

## 9.5 Estimation de la variation relative de la masse

En analysant les variations relatives des fréquences lors de cette série d'expériences, nous cherchons à estimer la variation relative de la masse en utilisant la méthode développée dans le chapitre 8. Dans ce paragraphe, nous ne cherchons pas à faire une analyse exhaustive, mais nous présentons trois cas avec les trois  $\Delta m$  différents et nous varions aussi les étages de l'ajout de la masse. Pour cela, nous cherchons à approcher la valeur de la variation relative de la masse suite à un ajout de  $\Delta m_3$  sur la masse 4 dans le paragraphe 9.5.1, un ajout  $\Delta m_2$  sur la masse 2 dans le paragraphe 9.5.2 et enfin un ajout  $\Delta m_1$  sur la masse 5 dans le paragraphe 9.5.3. De plus, dans un dernier test, nous effectuons trois ajouts de masses  $\Delta m_1$  successifs sur chacun des cinq étages pour tester si on est capable d'approcher chacun variation relative de masse.

Rappelons que si l'une des masses du système augmente, les fréquences diminuent en général. Ceci est remarquable vu que le signe de  $\Delta f$  est opposé à celui de  $\Delta m$ .

Pour chaque essai on mesure les accélérations de chacun des étages. Soient  $f_{i1}$ ,  $f_{i2}$ ,  $f_{i3}$ ,  $f_{i4}$  et  $f_{i5}$  les cinq fréquences calculées par la FFT du  $i^{\text{ème}}$  vecteur d'accélération correspondant au  $i^{\text{ème}}$  étage. Comme les 5 étages sont solidaires, les fréquences d'oscillations des 5 étages doivent être sensiblement identiques. Ceci est vérifié dans le tableau (9.5) qui présente les fréquences calculées par la FFT de chacun des cinq étages. Ces fréquences sont récupérées à l'état initial du système en tapant sur le troisième étage. Suivant les valeurs de l'écart des fréquences  $\max_{1 \leq i \leq n} (\Delta f_{ik})$  pour la  $k^{\text{ème}}$  fréquence  $f_k$ , l'écart maximal vaut  $\Delta f_5 = 0,0261$ . Ainsi, l'incertitude relative sur  $f_5$  est faible et vaut 0,0014. Il en est de même pour les fréquences après un ajout de masse.

	FFT du vecteur 1	FFT du vecteur 2	FFT du vecteur 3	FFT du vecteur 4	FFT du vecteur 5	$\max(\Delta f_k)$
$f_1$	2,2654	2,2654	2,2654	2,2654	2,2654	0
$f_2$	6,1712	6,1712	6,1712	6,1712	6,1712	0
$f_3$	9,5563	9,5563	9,5563	9,5563	9,5563	0
$f_4$	12,7070	12,7070	12,7070	12,7070	12,7070	0
$f_5$	18,3574	18,3574	18,3835	18,3835	18,3574	0,0261

TABLEAU 9.5. Les cinq fréquences calculées par la FFT du vecteur accélération de chacun des 5 masses.

Dans la suite, pour chaque  $k$  tel que  $k \in \{1, \dots, 5\}$ , nous posons  $f_k$  la  $k^{\text{ème}}$  fréquence moyenne telle que :

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^5 f_{ik}}{5} \quad (9.5)$$

Notre but est d'utiliser la relation liant la variation relative moyenne des fréquences  $\frac{\Delta f_k}{f_k}$  et la variation relative de la masse entre les essais considérés :

$$0 < \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{\Delta m}{m_T} \quad (9.6)$$

Voici les différents couples d'essais que nous allons traiter.

### 9.5.1 Un ajout de 12 % de la cinquième masse

Tout d'abord, nous étudions la variation relative des fréquences suite à un ajout de masse  $\Delta m_1 = 0,3094$  sur la cinquième masse. Celle-ci devient égale à 2,7587 Kg. Ainsi, la valeur de la variation relative de la masse est égale à  $\frac{\Delta m_1}{m_T} = 0,0248$ . Cet ajout vaut environ 12 % de la masse locale de celle-ci et environ 2,5% de la masse totale initiale du système.

En appliquant la FFT sur chaque vecteur d'accélération nous récupérons cinq fréquences moyennes pour chacun des trois essais avant et après cet ajout de masse. Pour le premier essai, les cinq  $\frac{-\Delta f_k}{f_k}$  moyennes sont marquées par des étoiles dans la figure (9.18), celles du deuxième essai

par des cercles et celles du troisième essai par des signes plus. En rouge, nous présentons la valeur de la variation relative de la masse  $\frac{\Delta m_1}{m_T}$ .

D'après la figure (9.18) correspondante, nous déduisons que l'opposé de toutes les variations relatives des fréquences sont bien bornées par la variation relative de la masse et par 0. En effet, le maximum de ces variations est atteint pour la troisième fréquence et vaut 0,0245. Par conséquent, la relation (9.6) est vérifiée expérimentalement pour ce cas.

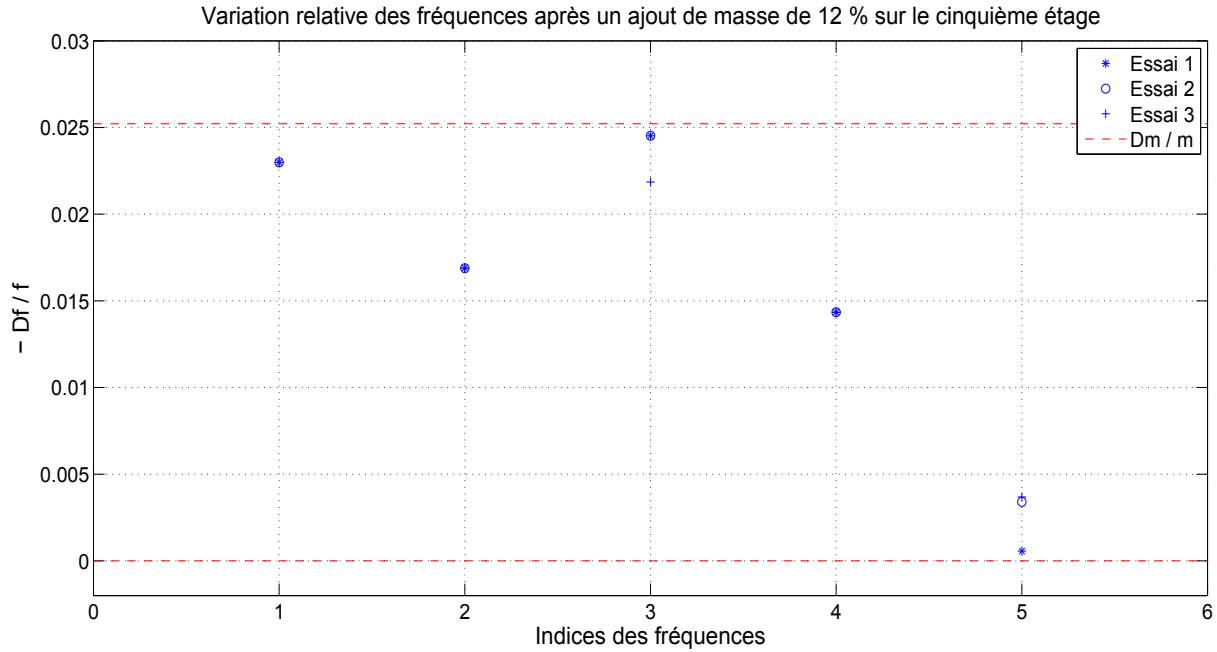


FIGURE 9.18. L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi un ajout de  $\Delta m_1$  sur la cinquième masse locale.

### 9.5.2 Un ajout de 25 % de la deuxième masse

La seconde étude repose sur l'ajout de la valeur  $\Delta m_2 = 0,62Kg$  sur la deuxième masse qui devient égale à  $3,0779Kg$ . Cet ajout de masse vaut environ 25 % de la masse locale de celle-ci ou environ 5% de la masse totale initiale du système. Dans ce cas, la variation relative de la masse est donnée par  $\frac{\Delta m_2}{m_T} = 0,0497$ . Les résultats obtenus de la variation relative des fréquences moyennes sont présentés dans la figure (9.19). Nous remarquons que les valeurs de la variation relative des fréquences sont bornées par 0 et par  $\frac{\Delta m_2}{m_T}$  à l'exception de la dernière valeur. Le maximum de ces variations relatives vaut 0,0524 et dépasse  $\frac{\Delta m_2}{m_T}$  avec une différence de 0,0027. En négligeant le poids des lames, nous considérons la masse des 5 étages seulement  $m_m = 12,2722Kg$ , ainsi  $\frac{\Delta m_2}{m_m} = 0,0505$  mais  $\max_{1 \leq k \leq n} \left( \frac{-\Delta f_k}{f_k} \right)$  dépasse toujours cette limite avec une différence de 0,0018.

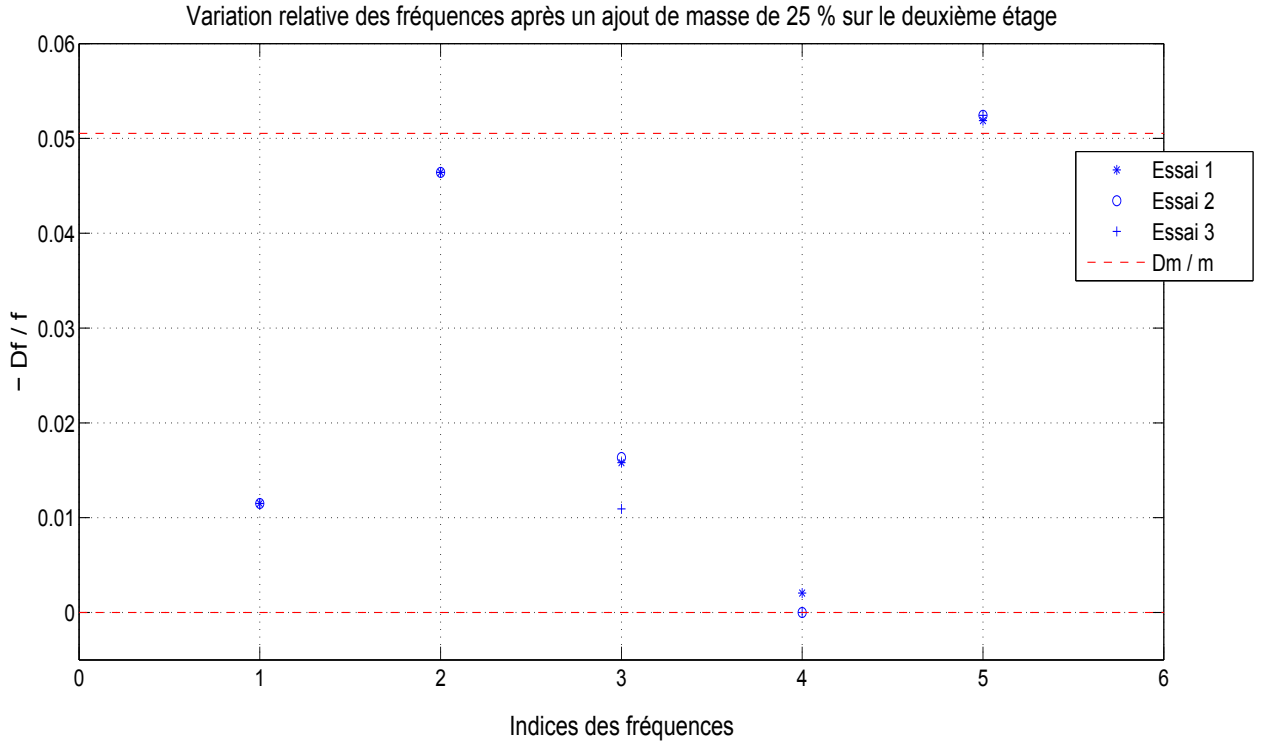


FIGURE 9.19. L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi un ajout  $\Delta m_2$  sur la deuxième masse locale.

### 9.5.3 Un ajout de 38 % de la quatrième masse

Dans un troisième test, nous supposons que le système a subi un ajout de masse  $\Delta m_3 = 0,9332Kg$  sur la quatrième masse qui vaut environ 38% de sa masse locale. Cet ajout vaut environ 7,5% de la masse totale de ce système. Dans ce cas, la valeur de la variation relative de la masse vaut  $\frac{\Delta m_3}{m_T} = 0,0748$ . Pour chacun des 3 essais, les cinq  $\frac{-\Delta f_k}{f_k}$  moyennes sont schématisés dans la figure (9.20). Nous remarquons que toutes les  $\frac{-\Delta f_k}{f_k}$  sont bornées par la valeur de  $\frac{\Delta m_3}{m_T}$  et par 0 à l'exception de la variation relative de la quatrième fréquence pour les trois essais. Malgré cet effet non rencontré numériquement, il est utile de noter que  $\frac{-\Delta f_4}{f_4}$  est proche de la valeur de  $\frac{\Delta m_3}{m_T}$ . En effet, le maximum des variations relatives des fréquences moyennes est tel que  $\frac{-\Delta f_4}{f_4} = 0,0819$  et dépasse la valeur de  $\frac{\Delta m_3}{m_T}$  avec une différence de 0,0071. Les autres variations relatives des fréquences moyennes vérifient la relation (9.6).

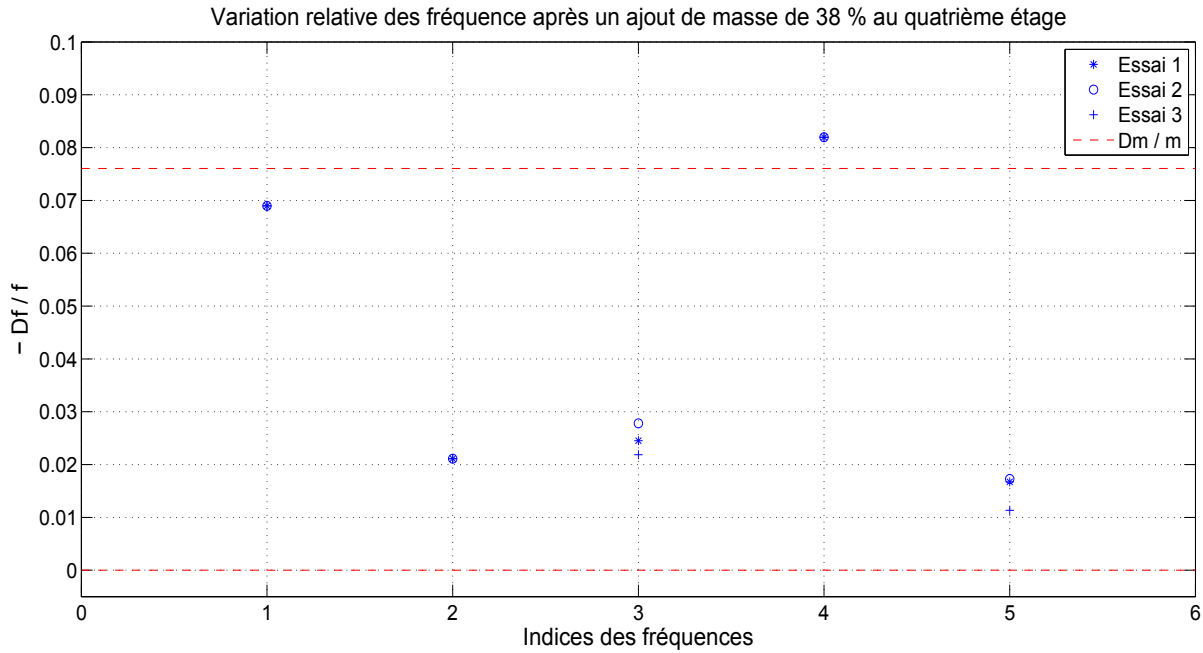


FIGURE 9.20. L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi un ajout de  $\Delta m_3$  sur la quatrième masse locale.

#### 9.5.4 Trois ajouts de 12 % chacun

Pour une dernière analyse de la variation relative de la masse, le système expérimental a subi au cours de l'intervalle de temps  $[0; T]$  les trois ajouts de la masse sur chacun des cinq étages simultanément. Soit au cours de l'intervalle de temps  $[0; t_1]$  un ajout de la masse  $\Delta m_1$  sur l'étage 1, puis au cours du temps  $[t_1; t_2]$  un second ajout de  $\Delta m_1$  sur l'étage 1. Ainsi, au cours du temps  $[0; t_2]$  l'étage 1 a subi un ajout de  $\Delta m_2 = 2\Delta m_1$  par rapport à sa masse initiale. Enfin, au cours du temps  $[t_2; T]$ , un troisième ajout de  $\Delta m_1$  est effectué sur l'étage 1. Par conséquent, au cours du temps  $[0; T]$  l'étage 1 a subi un ajout de  $\Delta m_3 = 3\Delta m_1$  par rapport à sa masse initiale. Nous reprenons la même démarche pour chacun des cinq étages.

L'opposé de la variation relative des fréquences est montré dans la figure (9.21). Comme prévu, chaque variation relative des fréquences à chaque étage est limitée par la valeur de la variation de la masse qui lui est attribuée et par 0, à l'exception de quelques unes qui dépassent parfois la limite associée. En effet, dans cet exemple, la matrice de masse considérée initiale après chaque ajout de masse n'est pas exactement homogène. Ce qui peut justifier l'existence de ces quelques exceptions. Malgré cet effet, ces valeurs sont proches de la valeur de la variation relative de la masse et donc nous sommes toujours capables de trouver un ordre de grandeur de cette variation relative.

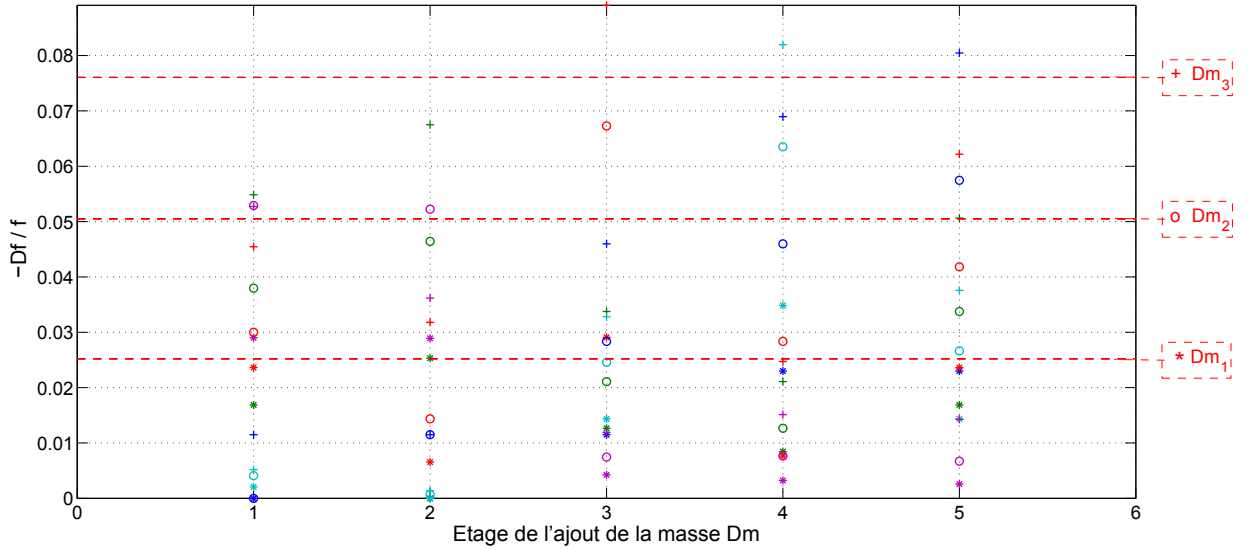


FIGURE 9.21. *L'opposé de la variation relative des fréquences moyennes pour le système expérimental ayant subi trois ajouts successifs de la masse  $\Delta m_1$  sur chacun des cinq étages.*

Dans ce paragraphe 9.5, les valeurs de l'opposé de la variation relative des fréquences vérifient souvent la relation (9.6). Quelques exceptions sont parfois détectées. En effet, cette relation, développée dans le chapitre 8, est une estimation puisque la méthode étudiée dans [49] ne s'applique pas pour des conditions de Neumann et Dirichlet aux bords. De plus, ces exceptions peuvent être rencontrées à cause des incertitudes de mesures souvent rencontrées dans de mesures expérimentales. Malgré ceci, nous avons toujours des informations sur l'ordre de grandeur de la variation relative de la masse.

## 9.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'efficacité expérimentale des trois méthodes de détection de la position d'une variation de masse et la quantification de la variation relative de masse sur un dispositif ayant la forme d'un bâtiment à 5 étages.

Une série d'essais a été enregistrée et traitée dans le but de vérifier expérimentalement les résultats théoriques obtenus dans les chapitres 7 et 8. Ainsi, 52 essais expérimentaux ont été effectués avant et après l'ajout des valeurs de masse différentes sur chacun des 5 étages indépendamment. L'analyse des signaux enregistrés en utilisant les méthodes de détection du changement de la masse a été montrée dans le paragraphe 9.4.

Les résultats sur la probabilité d'efficacité de chacune des trois méthodes de détection de position OI, EC et EM sont résumés dans les tableaux (9.1), (9.2), (9.3) et (9.4).

Pour conclure, les méthodes OI, EC et EM deviennent de plus en plus exactes avec l'augmentation de la valeur de la variation de la masse. Ceci est vérifié dans le tableau récapitulatif (9.6) qui calcule la probabilité totale de chacune des trois méthodes pour tous les tests étudiés. De ce tableau nous déduisons que, expérimentalement, la méthode EM, (c), ne montre pas une grande



efficacité pour la détection de la bonne position de l'ajout de la masse contrairement aux méthodes OI et EC.

En effet, avec l'augmentation de la valeur de l'ajout de la masse de 2,5 % à 7,5 % de la masse totale du système, la probabilité de la détection de la bonne position du changement de la masse en utilisant la méthode OI augmente de 53,3 % à 93,3 %, alors que la probabilité de la méthode EC augmente de 53,3 % à 86,6 %.

En conclusion, les méthodes OI et EC sont des méthodes pertinentes pour la détection de la bonne position de la variation de la masse d'un système, avec une probabilité de 75 % environ sur le total des 52 essais effectués expérimentalement.

	EXCIT = 3			ÉTAGE = 4	TOTAL
	$\Delta m_1$	$\Delta m_2$	$\Delta m_3$	$\Delta m_3$	
Méthode (a)	8/15	10/15	14/15	7/7	75 %
Méthode (b)	8/15	12/15	13/15	7/7	77 %
Méthode (c)	5/15	10/15	8/15	7/7	58 %

TABLEAU 9.6. Probabilité totale de l'efficacité des trois méthodes pour tous les essais expérimentaux étudiés dans ce chapitre.

Des tests sur la méthode de la quantification de la variation relative de la masse par celle des fréquences ont été menés dans le paragraphe (9.5). Après plusieurs tests, nous démontrons que généralement, cette méthode est efficace. Il se peut parfois que l'opposé d'une variation relative des fréquences dépasse la limite (la valeur de  $\frac{\Delta m}{m_T}$ ) mais très légèrement. Par conséquent, il est vérifié que la méthode de la quantification de la variation relative de la masse est fiable tant numériquement qu'expérimentalement.

# Conclusions et Perspectives

Au début de cette thèse, nous avons mis en évidence l'importance de l'analyse non destructive des systèmes dynamiques ; elle permet en particulier l'étude de systèmes qui sont trop imposants pour une étude en laboratoire, et de systèmes qui ne peuvent pas être mis hors service. Afin d'étudier l'évolution des caractéristiques dynamiques et vibratoires de tels systèmes, nous nous sommes intéressés à l'identification et l'étude des modifications des paramètres modaux de systèmes dynamiques linéaires du second ordre.

Lorsque les matrices initiales de tels systèmes sont connues (matrices de masse, de rigidité et d'amortissement), l'équation d'équilibre dynamique d'un système à  $n$  degrés de liberté (d.d.l), permet la détermination des modes propres et de la solution générale du système homogène et ceux du système non homogène (chapitre 2). Cependant, en pratique, nous disposons rarement de telles données, et les seules informations disponibles sont les réponses vibratoires du système. Ainsi, il est indispensable de développer des méthodes se basant principalement sur ces données qui peuvent être obtenues assez facilement en général.

En un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'identification des paramètres modaux à partir de la seule connaissance de la matrice des réponses vibratoires. Ceci nous a permis de construire une matrice, appelée matrice de corrélation et dont les vecteurs propres sont orthonormés et peuvent approcher les modes propres du système. Ceci nous a amené à effectuer une étude bibliographique sur les méthodes d'identification des paramètres modaux utilisant des méthodes de décomposition orthogonale et se basant sur la corrélation (chapitre 1).

Suite à cette étude, nous nous sommes particulièrement intéressés à trois méthodes (chapitre 3) : la Décomposition Orthogonale Propre (POD), la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) et la Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD). Après avoir décrit le principe de ces méthodes, nous avons établi les liens qui existent entre elles et nous avons mis en évidence les conditions nécessaires à l'application de chacune. En particulier, afin que les modes de la POD approchent les modes propres du système, il faut que la matrice de masse de celui-ci soit proportionnelle à la matrice identité. Dans le cas contraire, la connaissance a priori de la matrice de masse est une nécessité. Cependant, en général, la matrice de masse n'est pas nécessairement proportionnelle à la matrice identité et sa connaissance a priori n'est pas toujours possible. De plus, dans la littérature, il apparaît que pour s'assurer de la convergence de la POD, il faut que le temps d'observation tende vers l'infini, ou de manière équivalente, que le nombre d'échantillons tende vers l'infini. Or ceci ne donne pas d'informations précises sur les conditions à respecter pour pouvoir affirmer que les modes propres du système peuvent être approchés de manière convenable. Ainsi, nous avons établi des conditions plus précises pour l'application de la POD, et nous avons déterminé le temps d'observation minimal qui permet l'approximation des modes propres avec une précision choisie, même dans le cas où la matrice de masse n'est pas diagonale.

La problématique étudiée dans la deuxième partie de cette thèse est présentée au chapitre 5,

consiste à détecter et évaluer les modifications de la masse d'un système dynamique en supposant que la rigidité du système est constante. Cette étude est divisée en trois étapes : on s'intéresse dans un premier temps à déterminer l'instant où la modification de la masse a eu lieu, puis à localiser la position de cette modification et enfin à quantifier sa "valeur". Nous avons démontré que pour réaliser cette étude, il était préférable d'utiliser les accélérations du système pour des modes correspondant à des fréquences supérieures à  $\frac{1}{2\pi}$  car dans ce cas, les amplitudes de ce signal sont supérieures à celles du déplacement et donc permettent une plus grande précision. Pour les modes correspondant à des fréquences inférieures à  $\frac{1}{2\pi}$  on peut utiliser l'un ou l'autre de ces signaux sans réelle distinction.

Pour chacune des étapes de cette problématique, deux aspects sont présentés : le premier, représente le développement théorique avec des vérifications numériques et le second, démontre l'efficacité expérimentale des méthodes proposées. Ainsi, ces trois étapes sont étudiées d'abord d'un point de vue théorique et sont ensuite vérifiées numériquement.

Pour la première étape de notre étude, nous avons commencé par présenter la transformée en ondelettes (chapitre 5), qui contrairement à la transformée de Fourier, est une analyse temps-fréquence donnant des informations sur les fréquences en fonction du temps. Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'ondelette mère de Cauchy dont nous présentons les paramètres. De plus, nous avons montré que la transformée en ondelettes (TO) est aussi un outil très puissant pour l'identification des paramètres modaux et pour le calcul de l'amortissement. Comme l'augmentation de la masse entraîne une diminution des fréquences propres du système et vice versa, nous avons pu, grâce à la variation des fréquences calculées par la TO, intensifier l'instant où la modification de masse a eu lieu (chapitre 6). En effet la TO permet la détection de deux états stationnaires séparés par un état transitoire. Cet état transitoire permet de localiser l'instant qui nous intéresse, tandis que les deux autres états permettent de définir le comportement stationnaire du système.

Dans la deuxième étape (chapitre 7), trois méthodes de détection de la position du changement de la masse sont développées. Elles sont basées sur la comparaison des modes propres approchés avant et après ce changement : la méthode de détection de position suivant l'occurrence des indices, la méthode de détection suivant les écarts cumulés et la méthode de détection de la position suivant l'écart maximal. Des essais numériques ont démontré l'efficacité de ces méthodes.

La troisième étape de notre problématique (chapitre 8) était de quantifier la modification de la masse. En nous basant sur une étude théorique effectuée récemment dans un cas continu, nous avons vérifié que la variation relative des fréquences est limitée par celle de la masse. Les essais numériques ont mis en évidence des exceptions dans certains cas de diminutions de masse. En effet, comme il a déjà été noté, ces diminutions de masse entraînent une augmentation des fréquences. Suite à plusieurs essais, nous déduisons que dans un système à  $n$  d.d.l, après une diminution de  $p$  masses (pour  $p \in \{1, \dots, n\}$ ), les  $p$  plus grandes fréquences augmentent considérablement par rapport à l'augmentation des autres fréquences. Ceci entraîne  $p$  exceptions pour la quantification de la valeur du changement de masse. En conclusion, nous avons démontré que suite à  $p$  diminutions de masse et/ou augmentations de masse (pour  $p \in \{1, \dots, n\}$ ), les  $n - p$  variations relatives des fréquences les plus basses sont bornées par la valeur de la variation relative de la masse. De plus, on remarque que les variations relatives des premières petites fréquences permettent de connaître l'ordre de grandeur de la variation relative de la masse. Cette condition est très satisfaisante vu que les petites fréquences sont les plus faciles à déterminer expérimentalement.

Enfin, nous avons mis en œuvre expérimentalement les méthodes que nous avons développées pour l'étude de la variation de la masse, afin de mettre en évidence leur efficacité (chapitre 9).

Dans cet but, des essais ont été effectués sur un dispositif existant à l'UR Navier. C'est un système encastré-libre à 5 d.d.l. représentant un bâtiment à cinq étages. Les résultats obtenus expérimentalement étant concordants avec les résultats numériques, nous avons pu montrer que les méthodes que nous avons développées sont fiables tant numériquement qu'expérimentalement.

Ainsi, au cours de cette thèse nous avons développé des méthodes basées sur des outils comme la POD, la TO et la transformée de Fourier pour l'identification des caractéristiques des systèmes dynamiques linéaires. Toutefois, l'utilisation de la déformée modale décrite très brièvement dans le chapitre 4 et qu'on voit également dans le chapitre 8 paraît prometteuse et mérite d'être étudiée de manière plus approfondie. De plus, les méthodes développées au cours de notre étude semblent efficaces pour suivre une variation continue de la masse ou même des modifications de la rigidité. Enfin, il serait aussi intéressant d'étudier les caractéristiques des systèmes non linéaires puisque ceux-ci sont souvent rencontrés en réalité.



# Annexes



## Annexe A

# Décomposition de la matrice de réponse $\mathbf{X}$ suivant une SVD pour le cas d'un système conservatif

Dans le chapitre 3 de sa thèse, Kerschen [43] a cherché à écrire la matrice de réponse  $\mathbf{X}$  sous la forme d'une Décomposition en Valeurs Singulières SVD. En considérant que la matrice de masse du système est proportionnelle à l'identité, Kerschen a vérifié que les vecteurs singuliers gauches de la décomposition en une SVD de  $\mathbf{X}$  approchent les modes propres du système. Bien que ce résultat est intéressant, deux contraintes se posent : la première, la matrice de masse doit être proportionnelle à l'identité et la deuxième apparaît lorsqu'il existe deux pulsations proches. Dans cette annexe nous se basons sur l'idée de Kerschen pour vérifier l'approximation des vecteurs singuliers gauches en posant une condition nécessaire. Cette condition permet l'application de la SVD pour des cas plus généraux que ceux vérifiés par Kerschen.

Pour cela, reprenons l'équation du système conservatif libre :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

avec les conditions initiales  $\mathbf{x}(0)$  et  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  données et ayant pour solution générale :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i \quad (\text{A.2})$$

où les  $\boldsymbol{\varphi}_i$  sont les fonctions propres de  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  (2.24).

Les réponses étant discrétisées en temps avec un pas d'échantillonnage  $\Delta t$  assez petit, notons :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \cdots & \mathbf{x}(t_m) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{X}$  peut être écrite telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_n \end{pmatrix}^T \\ &= \boldsymbol{\phi} \mathbf{E}^T \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$



avec,  $\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$  les  $\mathbf{r}_i$  étant des vecteurs colonnes.

D'où,

$$\mathbf{X} = \phi \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.5})$$

$\phi$  est la matrice des vecteurs propres  $\varphi_i$  du système, elle est de dimension  $n \times n$ ,

$\mathbf{I}$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ ,

$\mathbf{Z}$  est la matrice nulle de dimension  $n \times (m - n)$ ,

$\mathbf{E}$  est la matrice des  $\mathbf{r}_i(t)$  pour  $t = t_1, \dots, t_m$ , elle est de dimension  $m \times n$ ,

$\mathbf{F}$  est une matrice quelconque de dimension  $m \times (m - n)$ .

Ceci constitue une SVD de la matrice  $\mathbf{X}$  puisqu'on suppose a priori que l'on connaît les  $\varphi_i$ . Ainsi, pour qu'on puisse considérer cette dernière équation comme une SVD, il faut que les deux matrices  $\phi$  et  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}$  soient orthonormales, par définition de la SVD. Pour cela, étudions les conditions d'orthonormalité de  $\phi$  et  $\mathbf{V}$ .

#### Pour la matrice $\phi$

$\phi$  est la matrice des vecteurs propres, qui sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse  $M$  (2.22), i.e. :

$$\varphi_i^T M \varphi_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, lorsque la matrice  $\mathbf{M}$  est proportionnelle à la matrice identité  $\mathbf{I}$ , on pourrait avoir  $\mathbf{U} = \phi$

$$\varphi_i^T \varphi_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{A.7})$$

Étudions le cas où  $\mathbf{M}$  n'est pas proportionnelle à  $\mathbf{I}$ .

En posant  $x(t) = M^{-\frac{1}{2}} q(t)$ , l'équation devient :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

Ce qui nous ramène au cas où la matrice de masse  $\mathbf{M}$  était proportionnelle à  $\mathbf{I}$  avec  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  symétrique.

Alors les vecteurs singuliers gauche de la matrice  $\mathbf{Q}$  telle que  $\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1(t) & \cdots & \mathbf{q}_n(t) \end{pmatrix}^T$  convergent vers les vecteurs propres  $\mathbf{p}_i$  de  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ .

Rappelons que les vecteurs propres  $\mathbf{p}_i$  sont reliés aux vecteurs propres  $\varphi_i$  de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  par la relation :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \varphi_i \quad (\text{A.9})$$

En outre, on a vu que les vecteurs singuliers gauche de  $\mathbf{X}$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ . Donc les vecteurs singuliers gauche de  $\mathbf{Q}$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ , avec  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}$  :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.10})$$

D'où la convergence des vecteurs propres de  $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$  vers les vecteurs propres  $\mathbf{p}_i$ .

Pour la matrice  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}$

Rappelons que :

$$\mathbf{X} = \phi \left( \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}^T \right) \quad (\text{A.11})$$

$\mathbf{X}$  peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \phi \left( \begin{pmatrix} \text{diag}(\|\mathbf{r}_i\|) & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{diag}(\|\mathbf{r}_i\|)^{-1}\mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}^T \right) \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, lorsque les  $\omega_i$  sont deux à deux distincts, et pour  $i \neq j$ ,

$$\frac{r_i r_j}{\|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{r}_j\|} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty, \quad (\text{A.13})$$

si certaines conditions sont vérifiées.

Ainsi, on a intérêt à chercher les conditions nécessaires qui assurent la convergence de  $\frac{r_i r_j}{\|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{r}_j\|}$  vers zéro et par suite celle des vecteurs propres de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  vers les vecteurs propres  $p_i$  de  $\mathbf{A}$ , lorsque  $m$  tend vers l'infini. Commençons par le cas avec  $\mathbf{M} = \rho \mathbf{I}$  et donc  $\phi = \mathbf{P}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} x_1(t_1) & \cdots & x_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t_1) & \cdots & x_n(t_m) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} r_1(t_1) & \cdots & r_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(t_1) & \cdots & r_n(t_m) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}_1\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|\mathbf{r}_n\| \end{pmatrix} (\text{diag}(\|\mathbf{r}_i\|)^{-1}\mathbf{E})^T \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

avec,

$$\|\mathbf{r}_i\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (r_i(t_k))^2} \quad (\text{A.15})$$

ainsi,

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}_1\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|\mathbf{r}_n\| \end{pmatrix} (\text{diag}(\|\mathbf{r}_i\|)^{-1}\mathbf{E})^T (\text{diag}(\|\mathbf{r}_i\|)^{-1}\mathbf{E}) \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}_1\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|\mathbf{r}_n\| \end{pmatrix} \mathbf{P}^T \quad (\text{A.16})$$

Comme les  $\frac{r_i(t_j)}{\|r_i\|}$  sont des vecteurs de norme 1, les termes de la diagonale de  $(\text{diag}(\|r_i\|)^{-1}\mathbf{E})^T (\text{diag}(\|r_i\|)^{-1}\mathbf{E})$  sont égaux à 1. Si on montre que lorsque  $m$  tend vers l'infini, et sous certaines conditions, cette matrice tend vers la matrice identité, on aura alors que :

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T \longrightarrow \mathbf{P} \text{diag}(\|r_i\|^2) \mathbf{P}^T, \quad (\text{A.17})$$

et par suite, les vecteurs propres de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  tendent vers les  $p_i$  et les valeurs propres tendent vers les  $\|r_i\|^2$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|} \longrightarrow 0$ . On va en fait, plus précisément donner une majoration de  $\left| \frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|} \right|$ .

La démonstration ci-dessous est faite dans le cas  $\dot{x}(0) = 0$  par souci de simplicité et donc

$$r_i(t_k) = r_i(0) \cos(\omega_i t_k) \quad (\text{A.18})$$

pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq k \leq m$ .  
Calculons dans ce cas  $\frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|}$  :

$$r_i r_j = \frac{\sum_{k=1}^m \cos(\omega_i t_k) \cos(\omega_j t_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \cos^2(\omega_i t_k)} \sqrt{\sum_{k=1}^m \cos^2(\omega_j t_k)}} \quad (\text{A.19})$$

On suppose que l'échantillonnage est constant et tel que :

$$\boxed{t_{k+1} - t_k = \Delta t}$$

Donc le temps d'observation  $T_{obs}$  est égale à :

$$T_{obs} = m \cdot \Delta t \quad (\text{A.20})$$

D'après le critère de Shannon Niquist, la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  doit être supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale du signal considéré.

Supposons par exemple que  $\boxed{\omega_i > \omega_j}$  ; comme la pulsation vaut  $\omega = 2\pi f$ , il faut donc que :

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} > 2f_i \quad (\text{A.21})$$

telle que  $2f_i = \frac{\omega_i}{\pi}$ .

Ainsi,

$$\Delta t < \frac{\pi}{\omega_i} \quad (\text{A.22})$$

Si  $\Delta t$  est assez petit, on peut approcher  $\frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|}$  par :

$$r_i r_j \simeq \frac{\int_0^{T_{obs}} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt}{\sqrt{\int_0^{T_{obs}} \cos^2(\omega_i t) dt} \sqrt{\int_0^{T_{obs}} \cos^2(\omega_j t) dt}} \quad (\text{A.23})$$

Notons  $T_i = \frac{1}{f_i} = \frac{2\pi}{\omega_i}$  la période minimale du signal et  $T_j = \frac{1}{f_j} = \frac{2\pi}{\omega_j}$  la période maximale du signal. Pour un entier positif  $k$  on a :

$$T_{obs} > kT_j > kt_i \quad (\text{A.24})$$

D'où,

$$T_{obs} > k \frac{2\pi}{\omega_j} \quad (\text{A.25})$$

Alors,

$$\int_0^{T_{obs}} \cos^2(\omega_i t) dt \simeq \frac{T_{obs}}{2} > k \frac{T_i}{2} \quad (\text{A.26})$$

et

$$\int_0^{T_{obs}} \cos^2(\omega_j t) dt \simeq \frac{T_{obs}}{2} > k \frac{T_j}{2} \quad (\text{A.27})$$

De plus,

$$\left| \int_0^{T_{obs}} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right| \simeq \left| \frac{\sin(\omega_i + \omega_j)T_{obs}}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_i - \omega_j)T_{obs}}{\omega_i - \omega_j} \right| \leq \frac{2}{\omega_i - \omega_j} \quad (\text{A.28})$$

Le terme  $\left| \int_0^{T_{obs}} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right|$  est donc borné.

Enfin,

$$\frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|} \leq \frac{2}{\omega_i - \omega_j} \cdot \frac{2}{T_{obs}} \leq \frac{4}{\omega_i - \omega_j} \cdot \frac{\omega_j}{k\pi} \quad (\text{A.29})$$

donc,

$$\frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|} \leq \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\omega_i}{\omega_j} - 1} \quad (\text{A.30})$$

D'après les inéquations (A.20), (A.22) et (A.25), cette majoration permet de connaître l'ordre de la précision de  $\frac{r_i r_j}{\|r_i\| \|r_j\|}$ , tout en considérant  $\boxed{m > 2k \frac{\omega_i}{\omega_j}}$ .

A ce point là, et avec les conditions ci-dessus, la matrice  $\mathbf{diag}(\|r_i\|)^{-1} \mathbf{E}$  est orthogonale.

De plus, on remarque d'après l'équation (A.11) que la matrice  $\mathbf{F}$  n'a pas d'influence sur la matrice  $\mathbf{X}$  puisqu'elle est multipliée par la matrice  $\mathbf{Z}$  des zéros ; donc on peut choisir les colonnes de  $\mathbf{F}$  de telle sorte qu'elles soient orthogonales à  $\mathbf{diag}(\|r_i\|)^{-1} \mathbf{E}$ .

Dans le travail qui suit, on essaie de préciser les conditions sur  $\mathbf{X}$  pour que les POMs de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ , *i.e.* les  $\psi_i$ , convergent vers les  $\varphi_i$ .

D'après ce qui précède on a :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \longrightarrow \mathbf{P} \begin{pmatrix} \|q_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|q_n\|^2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^T \quad (\text{A.31})$$

les vecteurs propres de  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  tendent vers les  $p_i$  et les valeurs propres convergent vers les  $\|q_i\|^2$ .

Or,  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$  car  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}$ .

Donc :

$$\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbf{P} \begin{pmatrix} \|q_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|q_n\|^2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^T \quad (\text{A.32})$$

Alors,

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P} \begin{pmatrix} \|q_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|q_n\|^2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.33})$$

Or,  $\phi = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}$  et  $\phi^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{P}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ .

D'où,

$$\mathbf{R} \mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{M} \longrightarrow \phi \begin{pmatrix} \|q_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|q_n\|^2 \end{pmatrix} \phi^{-1} \quad (\text{A.34})$$

Enfin, les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}$  convergent vers les  $\varphi_i$  et les valeurs propres vers les  $\|q_i\|^2$ .

Reprenons maintenant, l'équation du système dissipatif libre à  $n$  d.d.l avec les mêmes conditions initiales :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.35})$$

Si le système est légèrement amorti, sa solution est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i(t) \varphi_i \quad (\text{A.36})$$

En utilisant la même procédure que précédemment, on retrouve :

$$\mathbf{X} = \phi \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.37})$$

$$\mathbf{X} = \phi \begin{pmatrix} \mathbf{diag}(\|\mathbf{r}_i\|) & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{diag}(\|\mathbf{r}_i\|^{-1})\mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.38})$$

qui est une SVD particulière puisqu'elle suppose connue la matrice  $\phi$ .

La différence principale avec le cas conservatif est :

$$\mathbf{r}_i(t) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow \infty, \quad (\text{A.39})$$

puisque le système revient à sa position d'équilibre avec le temps.

Par suite, on ne peut plus supposer que  $\|\mathbf{r}_i(t)\| \longrightarrow \infty$  lorsque  $m \longrightarrow \infty$  et en conséquence, les vecteurs colonnes de  $\mathbf{diag}(\|\mathbf{r}_i\|^{-1})\mathbf{E}$  ne sont plus deux à deux orthogonaux.

Pourtant, si l'amortissement est faible, et en considérant un nombre suffisant de points d'échantillonnage,  $\mathbf{diag}(\|\mathbf{r}_i\|^{-1})\mathbf{E}$  devient presque orthogonale.

Pour conclure, les vecteurs singuliers d'un système linéaire libre légèrement amorti convergent vers les modes propres de ce système.



## Annexe B

# Évaluation numérique d'une modification de la masse d'un système dynamique

Nous étudions dans cette annexe les trois étapes de l'évaluation numérique d'un changement de masse d'un système dynamique. Dans ce but, nous considérons un système dynamique à 10 d.d.l. Soit ce système non amorti et non forcé ayant les conditions initiales de déplacement  $x_0$  et de vitesse  $\dot{x}_0$  non nulles. La masse totale du système étant supposée de 50  $Kg$ , chacune de ces masses pèse  $\frac{50}{10} = 5$   $Kg$ . Nous observons les vibrations de ce système pendant une heure de temps (3600 secondes). Nous considérons au cours de ce test numérique une diminution de la 7<sup>ème</sup> masse du système de 40 % de sa masse locale après 30 minutes (1800 secondes) du début de l'observation. Les fréquences théoriques du système avant et après modification sont données par :

$$F_{th}^{av} = \begin{pmatrix} 0,0106 \\ 0,0317 \\ 0,0520 \\ 0,0712 \\ 0,0888 \\ 0,1044 \\ 0,1176 \\ 0,1283 \\ 0,1360 \\ 0,1408 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{th}^{ap} = \begin{pmatrix} 0,0110 \\ 0,0317 \\ 0,0535 \\ 0,0734 \\ 0,0888 \\ 0,1069 \\ 0,1213 \\ 0,1283 \\ 0,1381 \\ 0,1552 \end{pmatrix} \quad (B.1)$$

Nous ne connaissons que la matrice des accélérations  $\ddot{\mathbf{X}}$  de chacune des 10 masses et le pas d'échantillonnage  $\Delta t = 0,44$  s. Nous cherchons à localiser le temps de la diminution de la masse (Étape 1), la position de cette modification (Étape 2) et la valeur de ce changement de masse (Étape 3) en utilisant les différentes méthodes étudiées et développées au cours de cette thèse.



### Étape 1 *Détection de la modification pendant l'observation*

Dans le but de localiser en temps l'instant  $t_1$  de la variation de la masse, nous appliquons la TO aux signaux de déplacement des masses. Suite à la diminution de la masse, il est prévu que les fréquences calculées par la TO augmentent. Les résultats de la TO sont présentés dans la figure (B.1) et nous nous en servons pour localiser les trois états :

- $E_0 = [100; 1570]$  secondes : c'est l'état initial stationnaire du système,
- $E_T = [1570; 1900]$  secondes : c'est l'état transitoire au cours duquel une masse locale du système diminue,
- $E_1 = [1900; 3500]$  secondes : c'est un nouvel état stationnaire du système.

Grâce à l'état transitoire localisé  $E_T = [1570; 1900]$  s, nous évaluons une valeur  $\tilde{t}_1$  approchant l'instant  $t_1$  du changement de la masse :

$$\tilde{t}_1 = \frac{1570 + 1900}{2} = 1735 \text{ s} \quad (\text{B.2})$$

avec une incertitude de  $\frac{1900 - 1570}{2} = 165 \text{ s}$ . Ainsi, l'instant  $t_1$  est de l'ordre de  $\tilde{t}_1 \pm 165$  secondes.

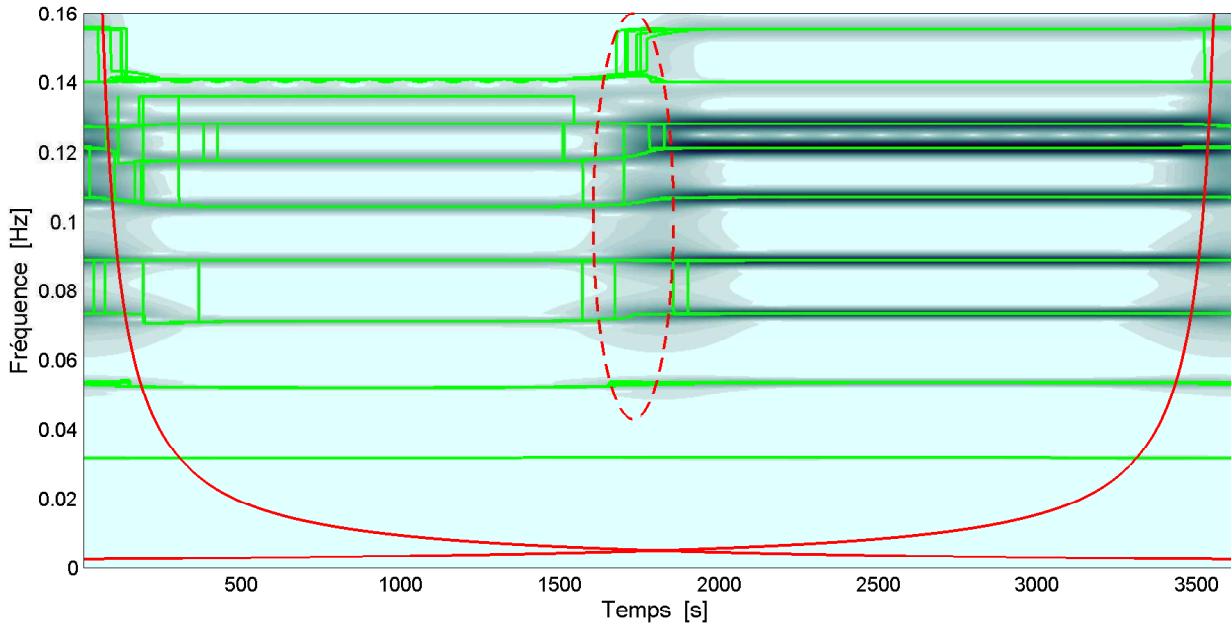


FIGURE B.1. La TO des accélérations du système ayant subi une diminution d'une masse après 30 minutes (1800 secondes) du début de l'observation.

Après l'application de la TO sur 10 différentes bandes de fréquences, nous schématisons les fréquences obtenues dans la figure (B.2) et nous présentons les fréquences récupérées en Hz des états  $E_0$  et  $E_1$  par la TO dans le tableau (B.1).

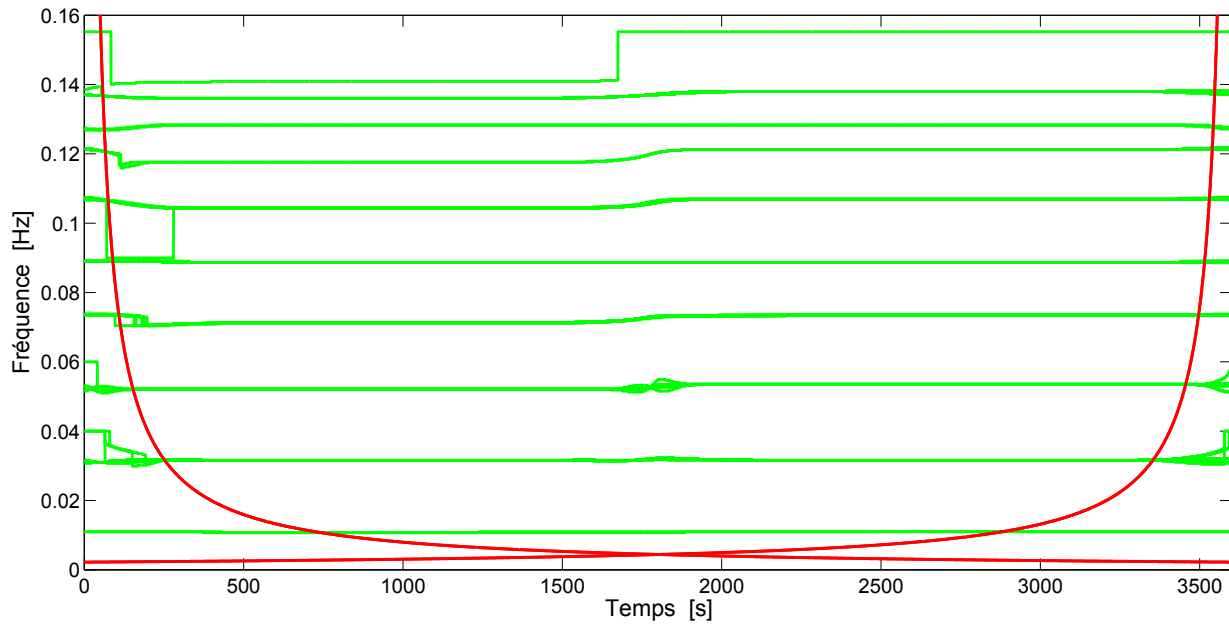


FIGURE B.2. Calcul des fréquences par la TO suivant 10 bandes de fréquences différentes.

Test 5	Avant	Après	$\Delta f_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}$
$f_1$	0,0107	0,0109	0,0002	0,0186
$f_2$	0,0315	0,0315	0	0
$f_3$	0,0521	0,0535	0,0014	0,0413
$f_4$	0,0715	0,0735	0,0020	0,0279
$f_5$	0,0886	0,0886	0	0
$f_6$	0,1044	0,1068	0,0024	0,0229
$f_7$	0,1177	0,1213	0,0036	0,0305
$f_8$	0,1283	0,1283	0	0
$f_9$	0,1361	0,1380	0,0019	0,0139
$f_{10}$	0,1409	0,1553	0,0144	0,1022

TABLEAU B.1. Les fréquences obtenues par la TO avant et après une diminution d'une masse locale de  $\Delta m = 2 \text{ Kg}$  tel que  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,04$ .

Les valeurs de la variation des fréquences  $\frac{\Delta f_n}{f_n}$  du tableau (B.1) sont toutes strictement inférieures à la valeur de la variation relative de la masse à l'exception de la 10<sup>ème</sup> fréquence.

### Étape 2 Localisation en espace de la modification entre deux états stationnaires

En utilisant une des méthodes de décomposition en base orthogonale (comme la TO, la POD, la SVD ou la SOD), nous appliquons les méthodes suivantes :

- (a) détection de la position suivant l'occurrence des indices, OI,
- (b) détection de la position suivant l'amplitude des écarts cumulés, EC,
- (c) détection de la position suivant l'écart maximal, EM.

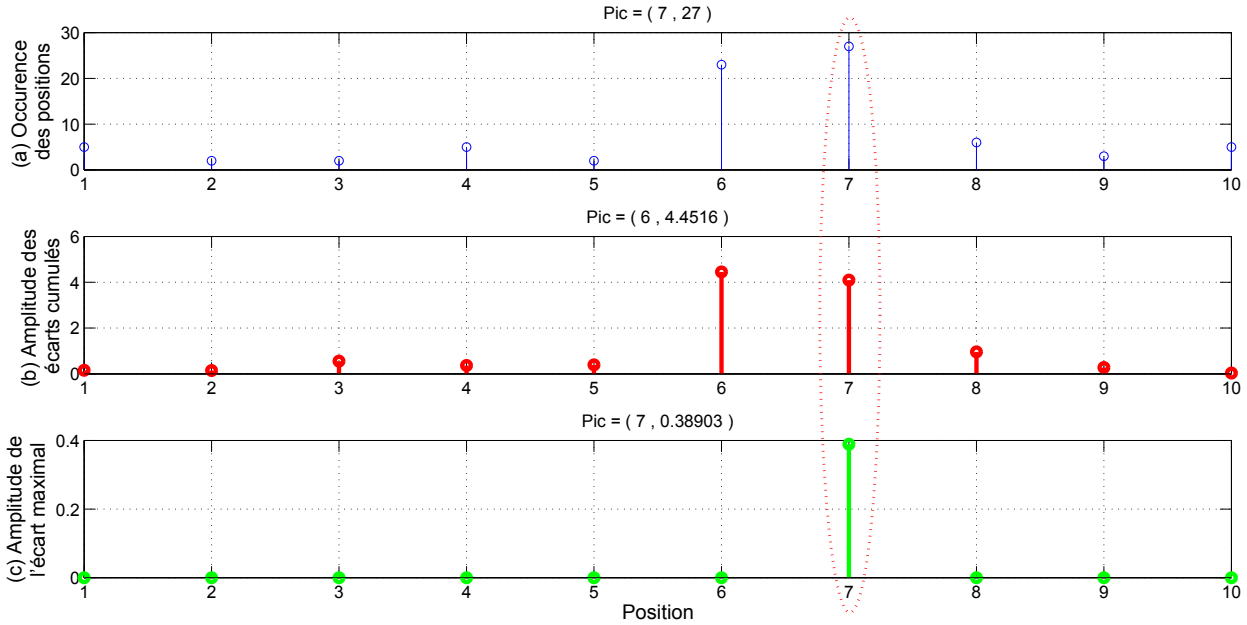


FIGURE B.3. Détection de la position de la masse du système ayant subi une diminution de 40% de la septième masse locale.

D'après les résultats schématisés dans la figure (B.3), les méthodes OI et EM détectent la bonne position de la diminution de masse, *i.e.* la 7<sup>ème</sup> masse. Par contre, suivant la méthode EC, cette diminution de masse a été effectuée sur la 6<sup>ème</sup> masse. Malgré que ce résultat n'est pas exacte, un pic sur la 7<sup>ème</sup> masse est nettement considérable par rapport à celui des autres masses. De plus, comme on l'a déjà discuté dans le paragraphe 7.3 du chapitre 7, grâce à ces méthodes, nous avons toujours des renseignements sur la masse ayant subi une modification. En effet, suite à une modification de la masse  $i$ , la variation des modes propres (sur laquelle se base chacune de ces trois méthodes) n'est importante que pour celle des masses  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$  pour tout  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ .

### Étape 3 Quantification de la modification entre deux états stationnaires

Pour l'étape 3 de notre analyse numérique de ce système dynamique à 10 d.d.l, nous récupérons deux matrices  $\ddot{\mathbf{X}}_{av}$  et  $\ddot{\mathbf{X}}_{ap}$ ;  $\ddot{\mathbf{X}}_{av}$  étant la matrice des accélérations au cours de l'intervalle de temps à l'état  $E_0$  et  $\ddot{\mathbf{X}}_{ap}$  celle des accélérations au cours de l'intervalle de temps à l'état  $E_1$ .

D'après la méthode développée dans le chapitre 8, nous appliquons la FFT pour tirer les fréquences avant et après l'endommagement de masse que nous schématisons dans la figure (B.4). En utilisant ces fréquences, nous calculons les 10 variations relatives des fréquences et nous les présentons dans la figure (B.5). Dans cette figure, nous traçons les  $\frac{-\Delta f_k}{f_k}$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  en bleu et la valeur  $\frac{\Delta m}{m_T} = 0,04$  ainsi que l'axe des ordonnées, représentant une variation nulle de la masse, en rouge.

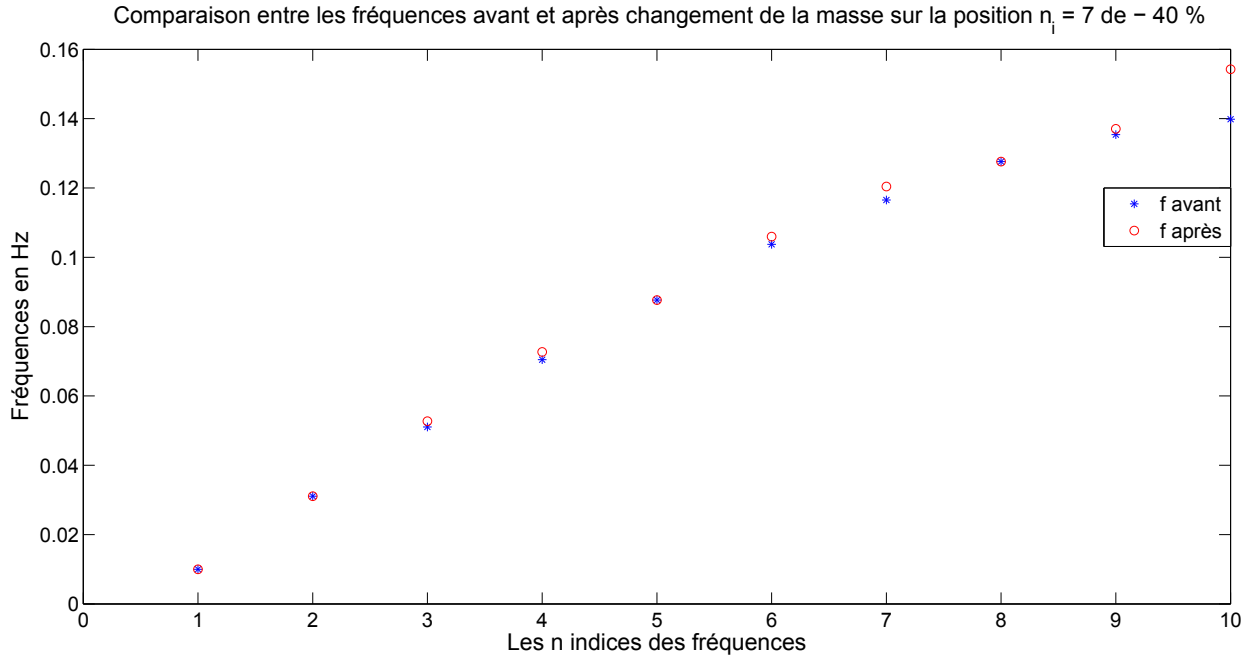


FIGURE B.4. Le tracé des fréquences avant et après une diminution de la septième masse de 40% de la masse locale de celle-ci.

Comme il a déjà été remarqué dans le chapitre 8, suite à un endommagement de masse, on s'attend à ce que toutes les variations relatives des fréquences soient bornées entre 0 et la valeur de  $\frac{\Delta m}{m_T}$  à l'exception de la 10<sup>ème</sup> variation. Ainsi, pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , nous retrouvons la relation entre la variation relative de la masse et celle des fréquences :

$$0 \leq \frac{-\Delta f_k}{f_k} \leq \frac{\Delta m}{m_T} \quad (\text{B.3})$$

Pour conclure, nous avons présenté dans cette annexe une analyse numérique complète pour l'évaluation d'un endommagement d'un système dynamique linéaire quasi-stationnaire. Nous avons vérifié que nous sommes capables de localiser l'instant d'une modification de masse, de détecter la masse ayant subi cette modification et de quantifier la variation de la masse.

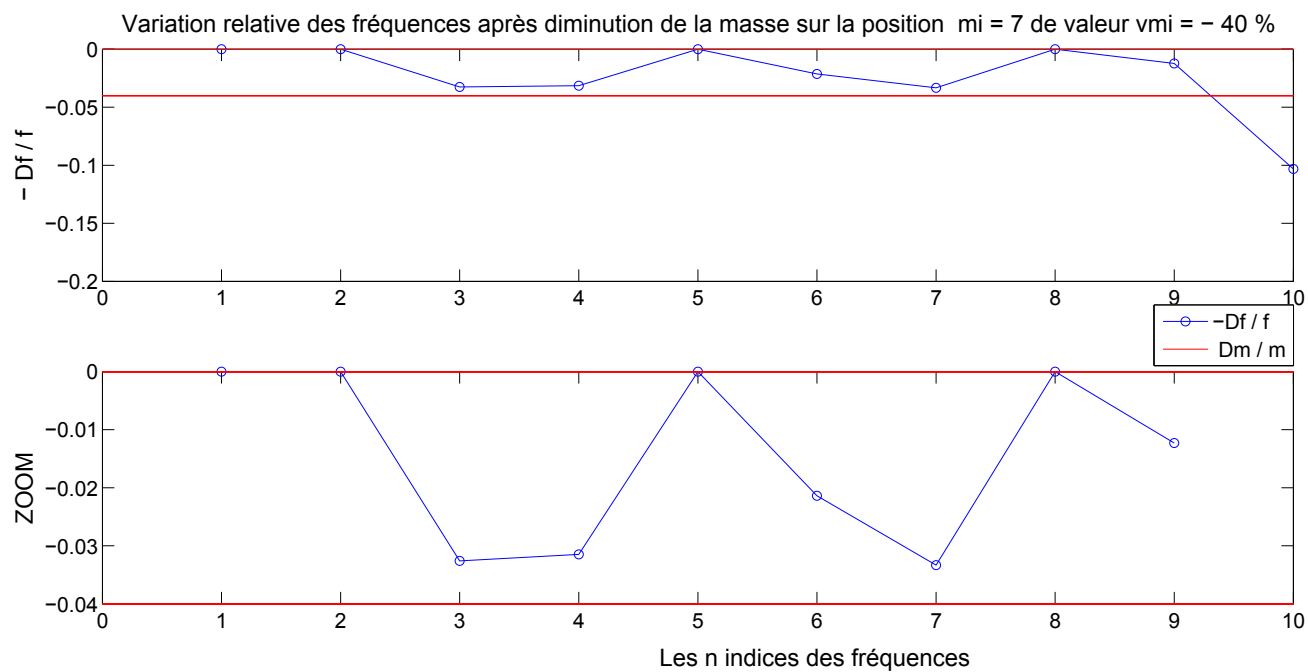


FIGURE B.5. En rouge, le tracé de  $\frac{\Delta m}{m_T}$ . En bleu, le tracé de l'opposé de la variation relative des fréquences suite à une diminution de la septième masse de 40 % de la masse locale de celle-ci.

## Annexe C

# Les fréquences calculées par la FFT des essais expérimentaux

Il est déjà noté dans le chapitre 9 figure (9.5) que nous avons effectué au total 52 essais expérimentaux. Que ce soit à l'état initial ou après un ajout de masse de  $\Delta m_1$ ,  $\Delta m_2$  ou  $\Delta m_3$  sur chacun des cinq étages, trois différentes forces latérales sont exercées sur le dispositif en excitant le troisième étage.

Nous présentons dans cette annexe la moyenne des fréquences calculées par la FFT à l'état initial pour les trois essais de force expérimentale (tableau (C.1)). Ensuite, après un ajout de masse  $\Delta m_1$  sur chacun des 5 étages, nous déterminons les 5 fréquences moyennes ; elles sont présentées dans le tableau (C.2). Nous montrons également dans le tableau (C.3) les 5 fréquences moyennes du dispositif à 5 masses après l'ajout de  $\Delta m_2$  sur chacune des 5 masses. De plus, nous présentons dans le tableau (C.4) les 5 fréquences moyennes pour les 3 essais des différentes forces latérales après l'ajout de  $\Delta m_3$  sur chacun des 5 étages. Enfin, après l'ajout de  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage, nous excitons les étages 1, 2, 4 et 5 consécutivement. Les fréquences récupérées grâce à la FFT sont données dans le tableau (C.5).

$\Delta m_0$	Étage 0
$f_1$	2, 2654
$f_2$	6, 1712
$f_3$	9, 5476
$f_4$	12, 7070
$f_5$	18, 3712

TABLEAU C.1. Les fréquences moyennes en Hz obtenues par la FFT à l'état initial du système.

	Excitation de l'étage 3				
$\Delta m_1$	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5
$f_1$	2, 2654	2, 2654	2, 2393	2, 2133	2, 2133
$f_2$	6, 0671	6, 0150	6, 0931	6, 1191	6, 0671
$f_3$	9, 3219	9, 4851	9, 2698	9, 4747	9, 3219
$f_4$	12, 6809	12, 7070	12, 5247	12, 2643	12, 5247
$f_5$	17, 8384	17, 8401	18, 2932	18, 3123	18, 3244

TABLEAU C.2. Les fréquences moyennes obtenues en Hz par la FFT après un ajout de  $\Delta m_1$  sur chacun des 5 étages.

	Excitation de l'étage 3				
$\Delta m_2$	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5
$f_1$	2, 2654	2, 2393	2, 2012	2, 1612	2, 1352
$f_2$	5, 9369	5, 8848	6, 0410	6, 0931	5, 9629
$f_3$	9, 2612	9, 4105	8, 9053	9, 2768	9, 1483
$f_4$	12, 6549	12, 6983	12, 3945	11, 8998	12, 3685
$f_5$	17, 3992	17, 4113	18, 2342	18, 2307	18, 2481

TABLEAU C.3. Les fréquences moyennes obtenues en Hz par la FFT après un ajout de  $\Delta m_2$  sur chacun des 5 étages.

	Excitation de l'étage 3				
$\Delta m_3$	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5
$f_1$	2, 2393	2, 2393	2, 1612	2, 10922	2, 0831
$f_2$	5, 8327	5, 7546	5, 9629	6, 0410	5, 8588
$f_3$	9, 1136	9, 2438	8, 6970	9, 3115	8, 9539
$f_4$	12, 6410	12, 6896	12, 2904	11, 6654	12, 2296
$f_5$	17, 4027	17, 7064	18, 1526	18, 0936	18, 1092

TABLEAU C.4. Les fréquences moyennes obtenues en Hz par la FFT après un ajout de  $\Delta m_3$  sur chacun des 5 étages.

	Étage 4			
$\Delta m_3$	Excitation de l'étage 1	Excitation de l'étage 2	Excitation de l'étage 4	Excitation de l'étage 5
$f_1$	2, 1092	2, 1092	2, 1092	2, 1092
$f_2$	6, 0410	6, 0410	6, 0410	6, 0410
$f_3$	9, 3219	9, 3219	9, 3219	9, 3375
$f_4$	11, 6654	11, 6654	11, 6654	11, 6654
$f_5$	18, 1491	18, 1491	17, 8471	17, 9564

TABLEAU C.5. Les fréquences obtenues en Hz par la FFT après un ajout de  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage en excitant les étages 1, 2, 4 et 5.





## Annexe D

# Recherche de la position de l'ajout de la masse

Dans cette annexe nous présentons les résultats de détection de la position de l'ajout de masse, obtenus après une analyse expérimentale étudiée dans le chapitre 9. En utilisant les trois méthodes OI, EC et EM développées dans le chapitre 7, nous traçons les résultats obtenus pour trois cas différents.

### D.1 Un ajout de masse de 5 % de la masse totale

On ajoute tout d'abord la valeur  $\Delta m_2$  à l'étage 1 et nous effectuons, comme pour tous les autres cas, 3 essais. On récupère les résultats schématisés dans la figure (D.1). On remarque ainsi que chacune des trois méthodes OI, EC et EM est capable de détecter que le changement de la masse a été effectué au premier étage. Ensuite, dans la figure (D.2), on présente les résultats obtenus après l'ajout de la masse au deuxième étage. La méthode OI détecte une seule fois la position 2, la méthode EC deux fois et la méthode EM trois fois. Par la suite, on ajoute la masse au troisième étage et on déduit de la figure (D.3) que les méthodes OI et EC détectent deux fois de trois essais la position 3 alors que la méthode EM ne détecte la bonne position qu'une seule fois. De la figure (D.4) où l'ajout de la masse a été effectué au quatrième étage, on remarque que la méthode OI détecte la position 4 dans un seul des trois essais alors que les méthodes EC et EM trouvent la position 4 deux fois des trois essais identiques. Enfin, on ajoute la masse  $\Delta m_2$  au cinquième étage. Les méthodes OI et EC détectent cette position pour tous les essais tandis que la méthode EM détecte la bonne position une fois des trois essais. Ces résultats sont schématisés dans la figure (D.5).

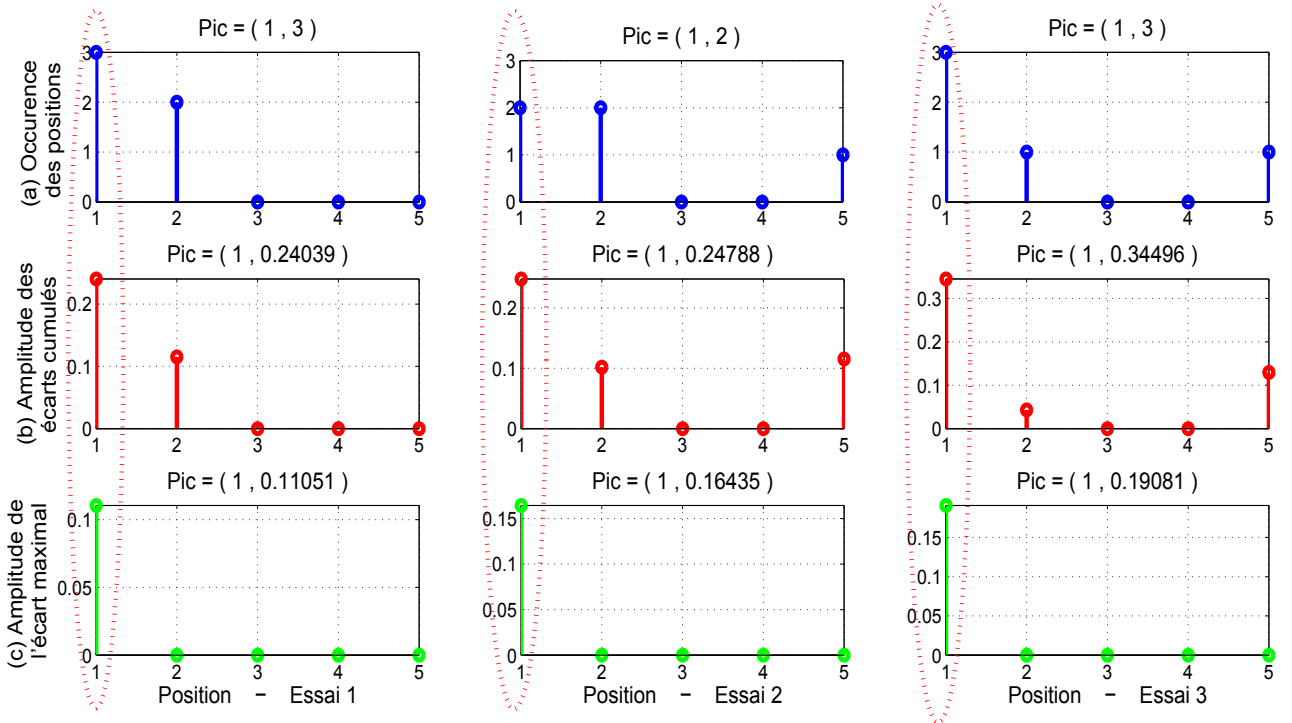


FIGURE D.1. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_2$  sur le premier étage et en tapant sur le troisième étage.

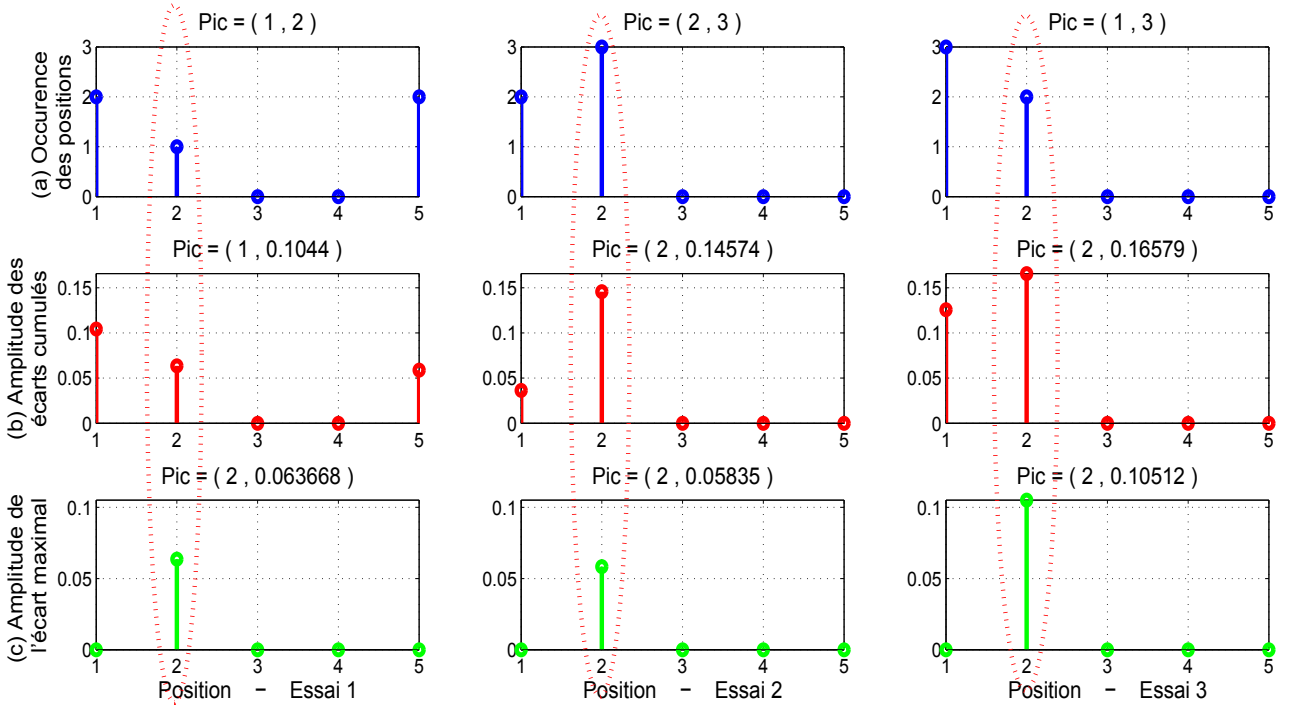


FIGURE D.2. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_2$  sur le deuxième étage et en tapant sur le troisième étage.

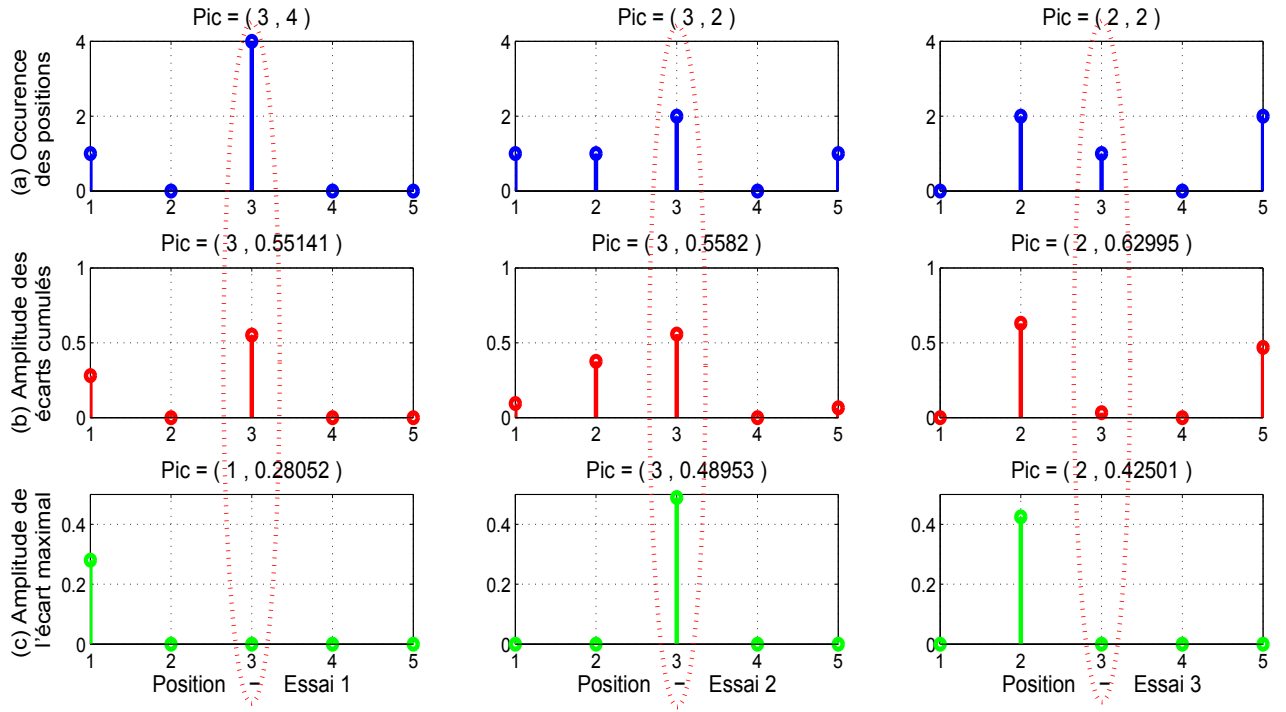


FIGURE D.3. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_2$  sur le troisième étage et en tapant sur le troisième étage.

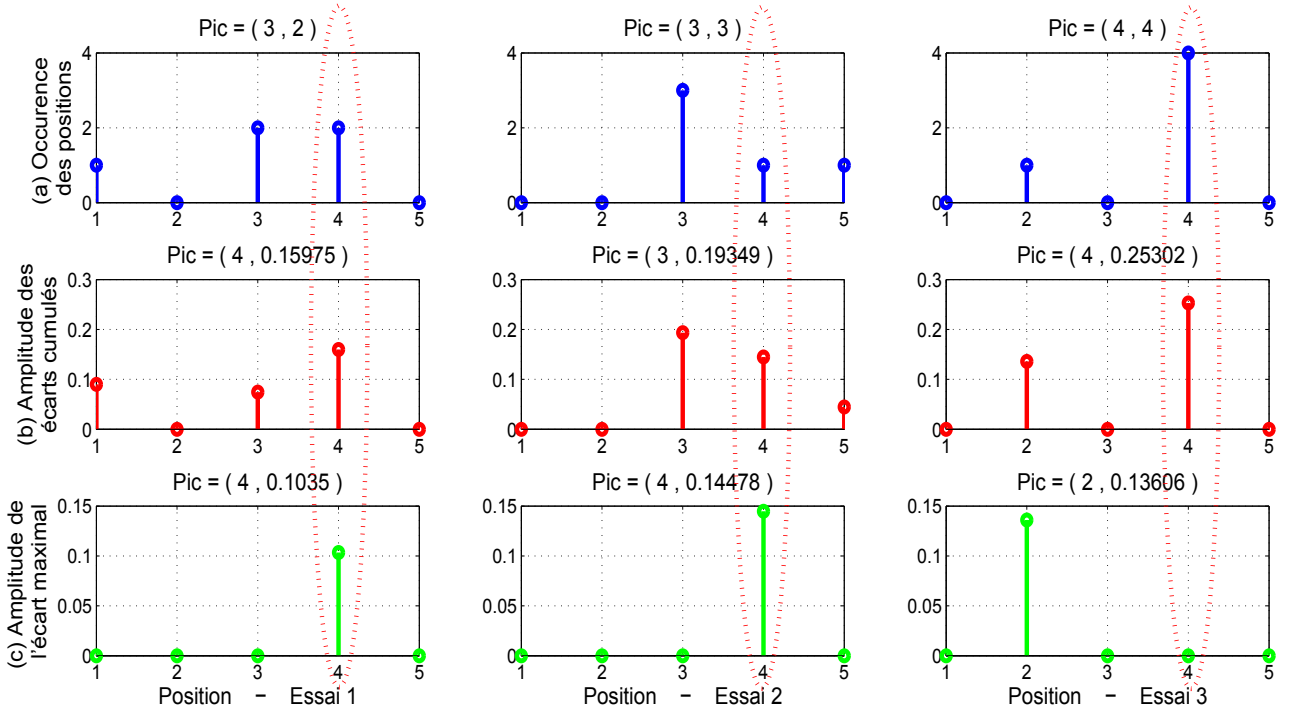


FIGURE D.4. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_2$  sur le quatrième étage et en tapant sur le troisième étage.

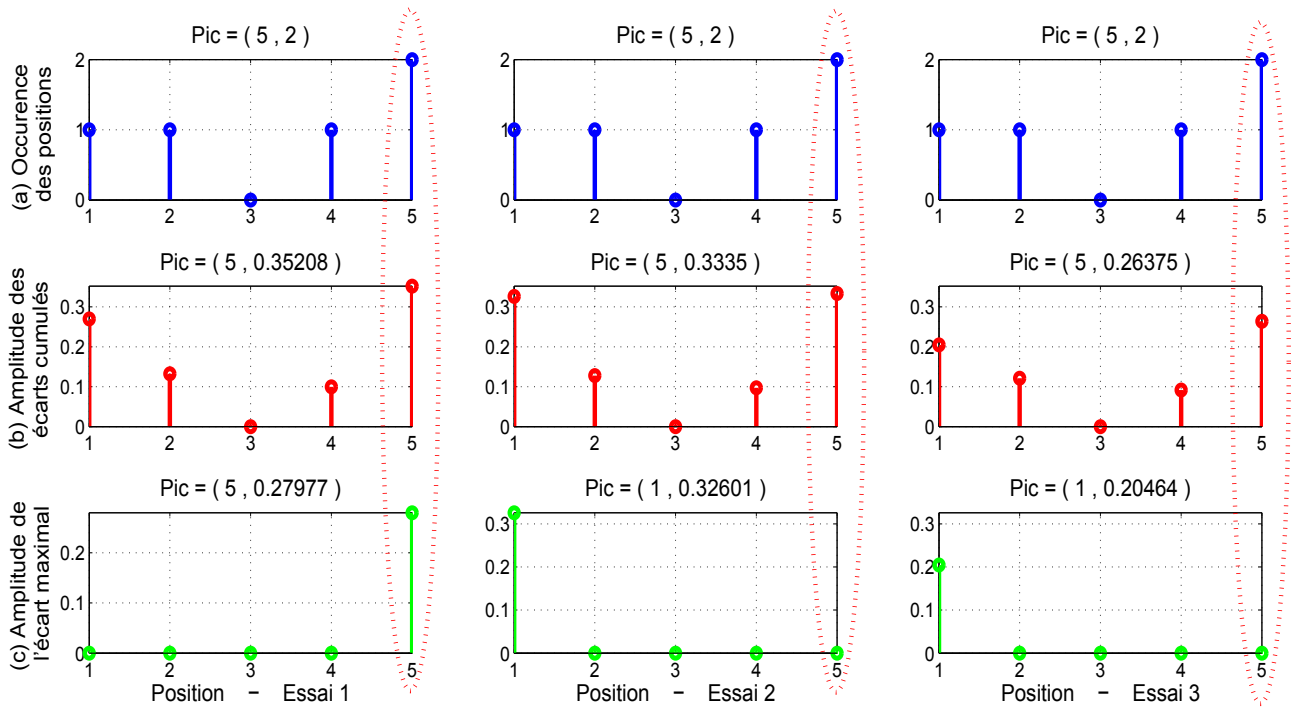


FIGURE D.5. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_2$  sur le cinquième étage et en tapant sur le troisième étage.

## D.2 Un ajout de masse de 7,5 % de la masse totale

Les résultats montrés dans la figure (D.6) sont ceux du système avec un ajout de la valeur  $\Delta m_3$  au premier étage. Sur les trois essais présentés, la méthode OI trouve la position 1, alors que les méthodes EC et EM détectent la bonne position deux fois. De plus, les méthodes OI, EC et EM détectent deux fois l'ajout de la masse à l'étage 2 comme le montre la figure (D.7). Ensuite, la figure (D.8) montre que les méthodes OI et EC détectent à chaque essai la position 3 où l'ajout de la masse a été effectué et que la méthode EM ne trouve cette position qu'une seule fois. En ajoutant la masse  $\Delta m_3$  au quatrième étage, les méthodes OI, EC et EM positionnent le changement de la masse à l'étage 4 dans tous les essais (figure (D.9)). Enfin, comme le montre la figure (D.10) résultante de l'étude des données mesurées après l'ajout de la masse au cinquième étage, les méthodes OI et EC détectent la position 5 dans chacun des trois essais alors que la méthode EM est incapable de détecter la bonne position.

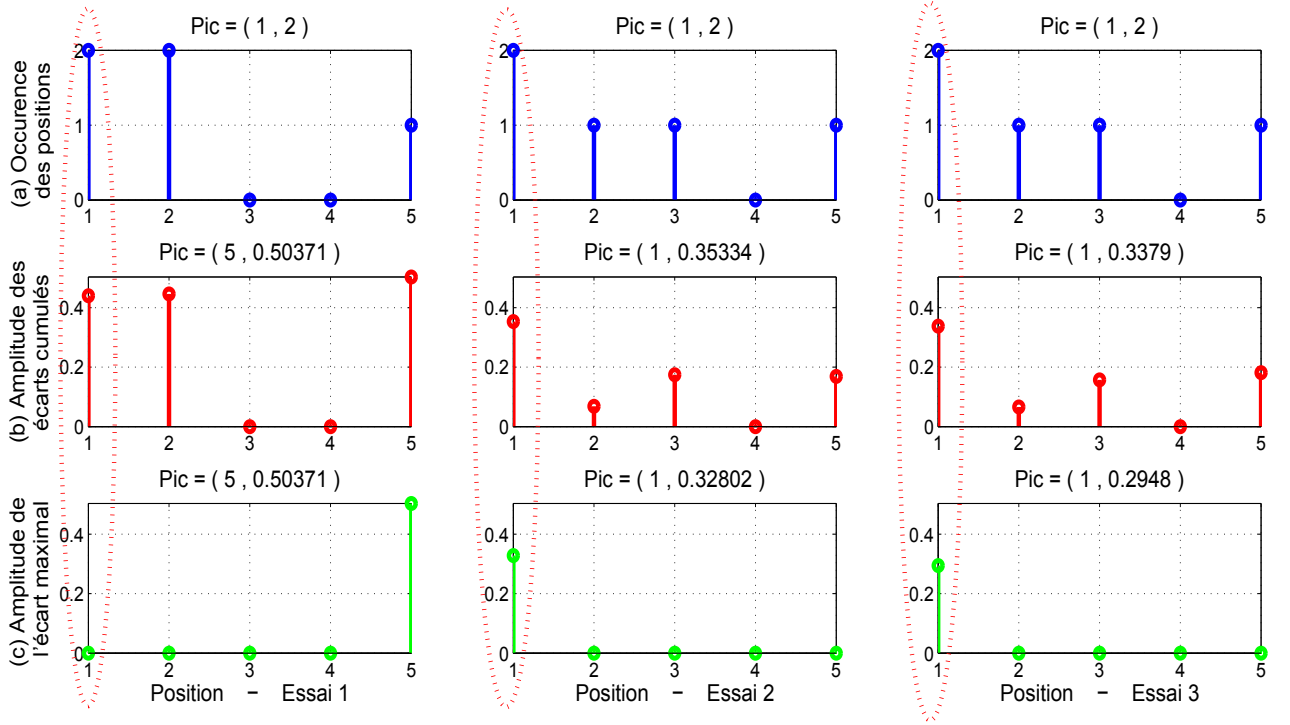


FIGURE D.6. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le premier étage et en tapant sur le troisième étage.

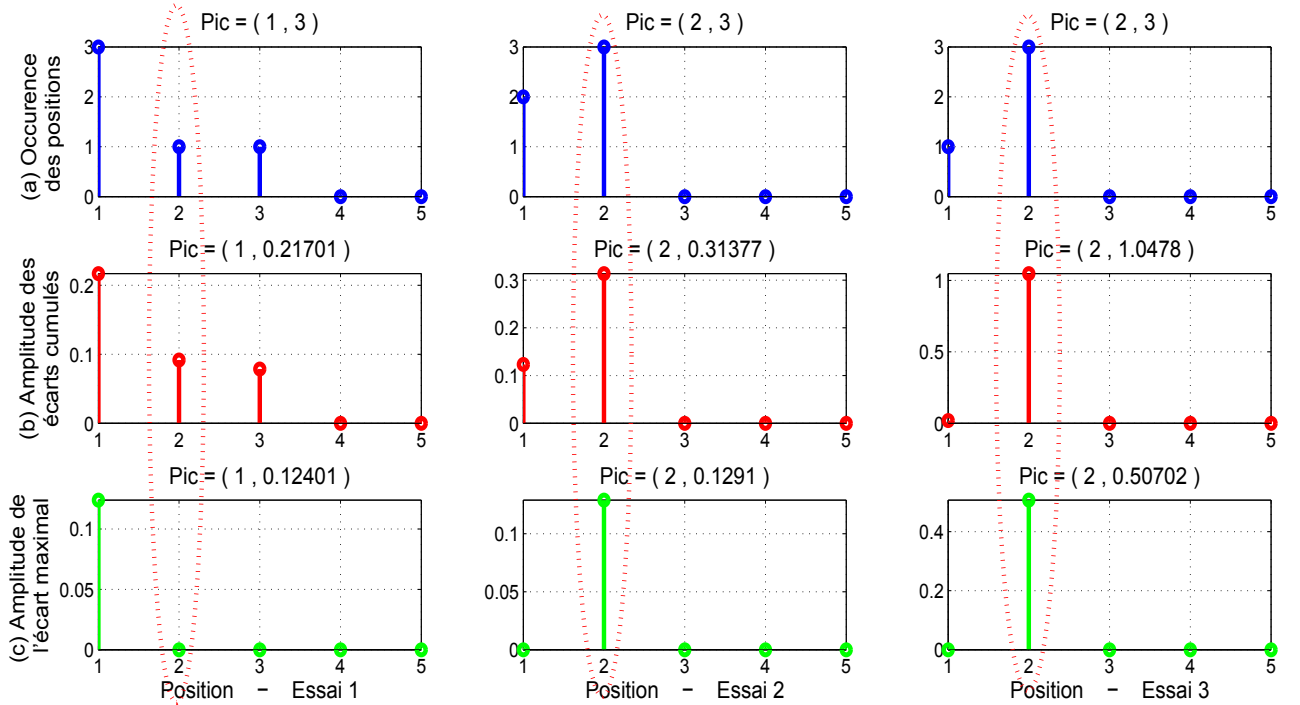


FIGURE D.7. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le deuxième étage et en tapant sur le troisième étage.

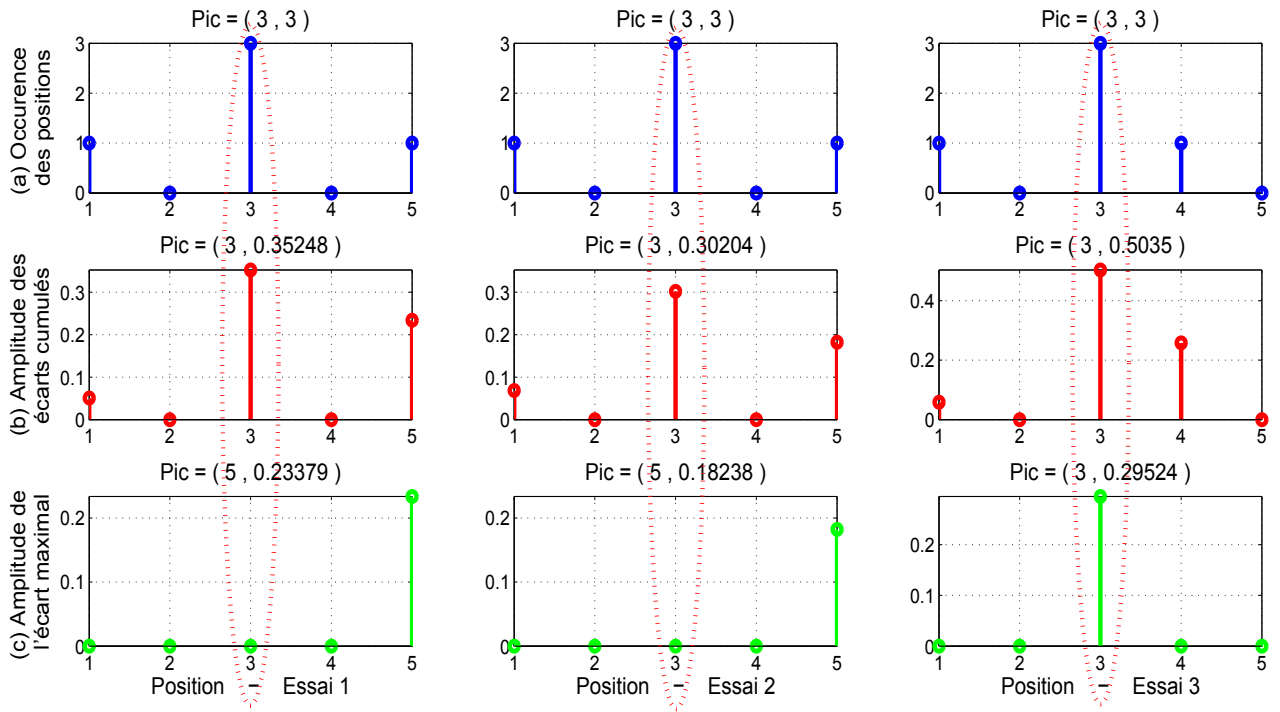


FIGURE D.8. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le troisième étage et en tapant sur le troisième étage.

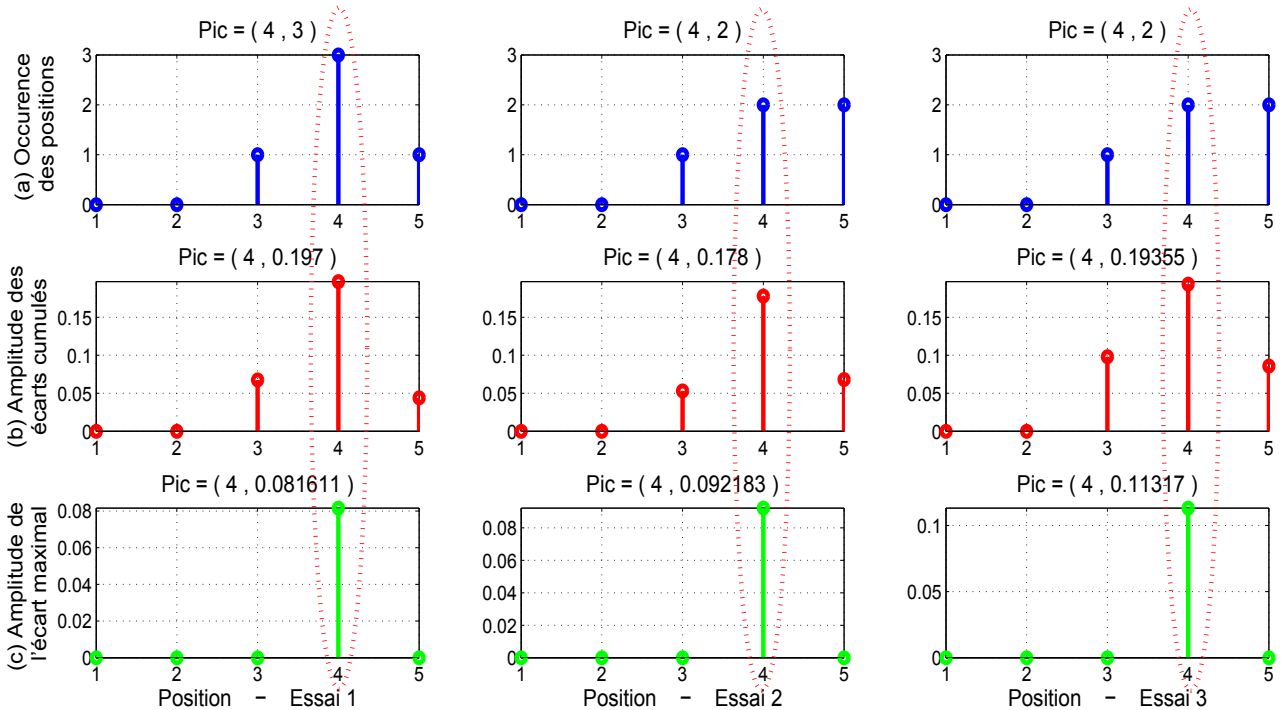


FIGURE D.9. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage et en tapant sur le troisième étage.

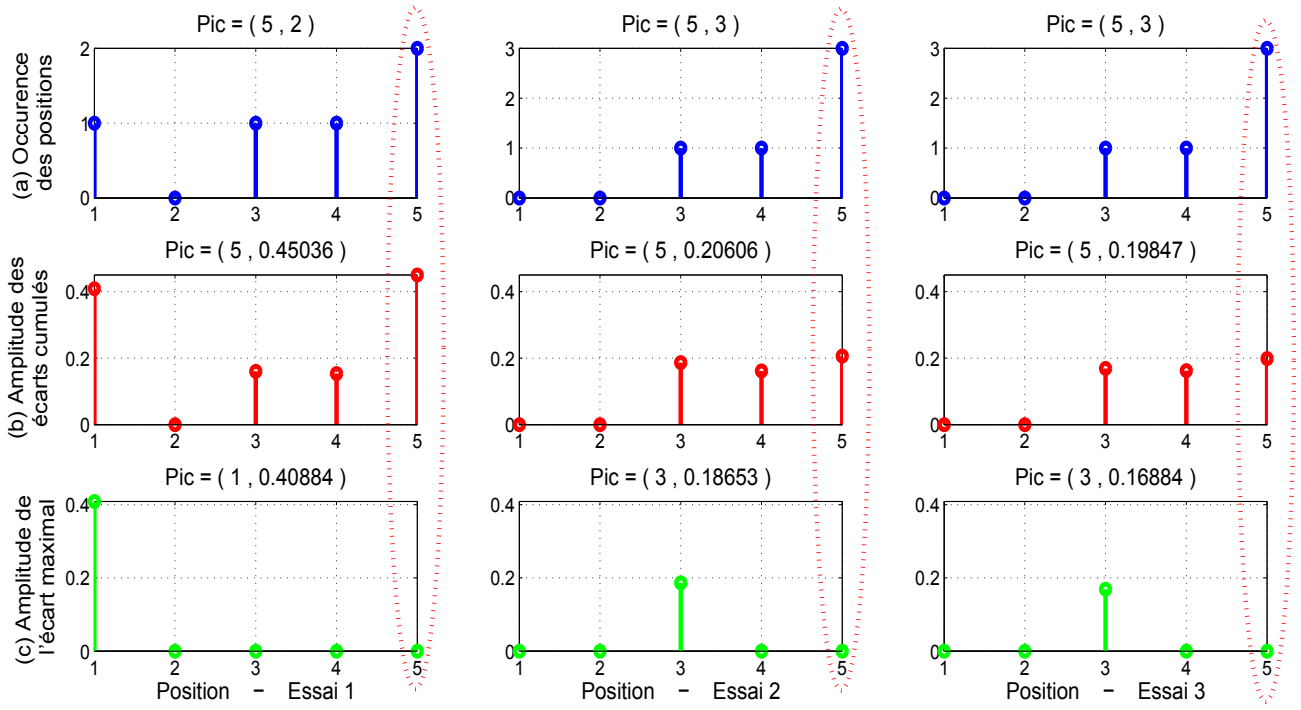


FIGURE D.10. Recherche de la position pour les trois essais avec un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le cinquième étage et en tapant sur le troisième étage

### D.3 Variation de l'étage d'excitation

On présente dans la figure (D.11) les résultats de la détection de la position 4 en tapant sur le premier étage et dans la figure (D.12) ceux en tapant avec le marteau sur le second étage. On déduit de ces deux figures que les méthodes OI, EC et EM détectent la bonne position 4 du changement de la masse.

Concernant le même cas mais en tapant avec le marteau latéralement sur le troisième étage, les résultats sont déjà montrés précédemment (figure (D.9)). En effet, dans le paragraphe 9.4.3, on montre les résultats obtenus avec trois essais après un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage dans la figure (D.9). Ainsi, ces résultats sont utiles pour l'étude effectuée dans ce paragraphe, et font partie du calcul de la probabilité de l'efficacité des trois méthodes de recherche de la position d'une variation de masse.

Enfin, les résultats de la recherche de la position de l'ajout de la masse en tapant sur le quatrième étage sont montrés dans la figure (D.13) et ceux en tapant sur le cinquième étage dans la figure (D.14). De ces figures on peut déduire que les trois méthodes arrivent à détecter la bonne position 4 où la masse a été modifiée.



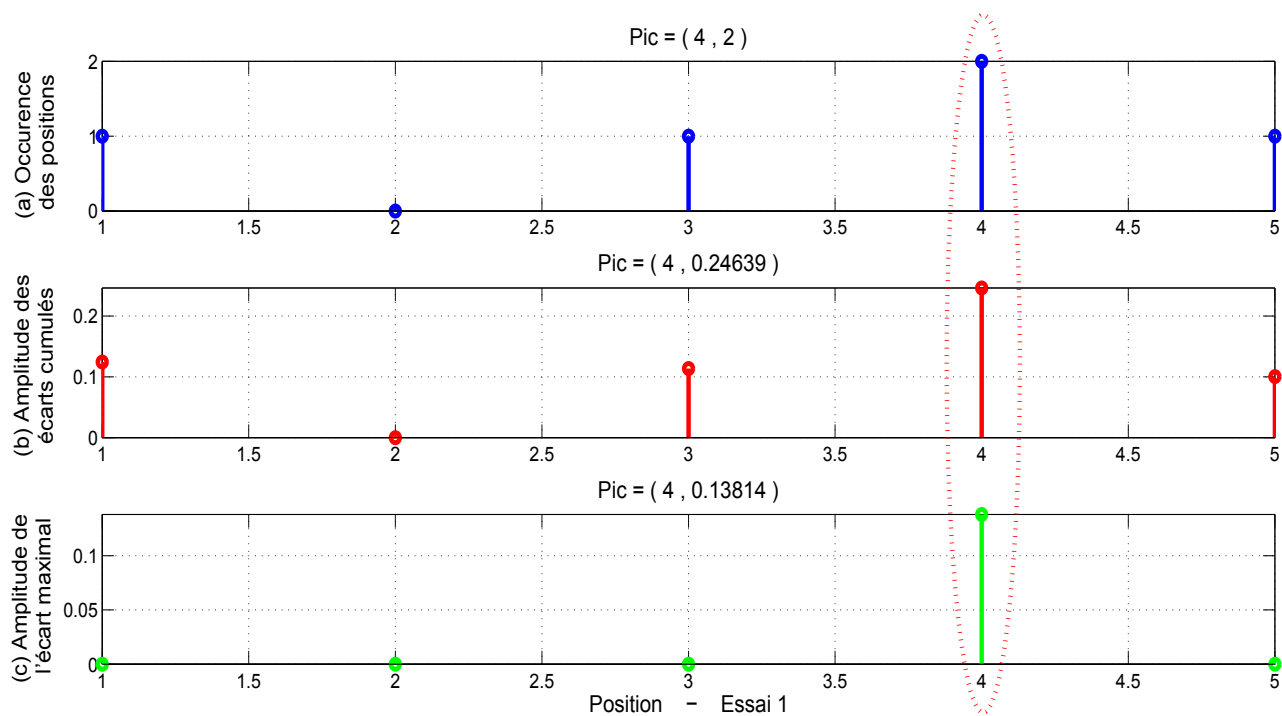


FIGURE D.11. Recherche de la position après un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage et en tapant sur le premier étage.

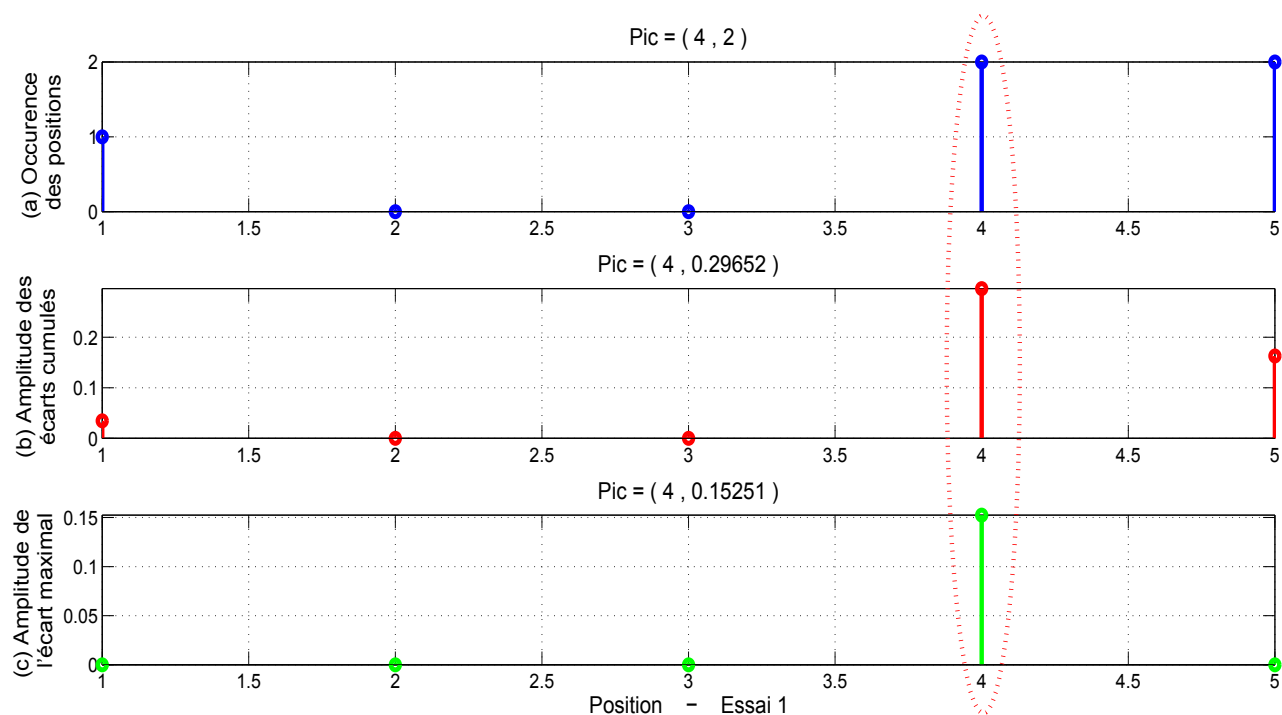


FIGURE D.12. Recherche de la position après un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage et en tapant sur le deuxième étage.

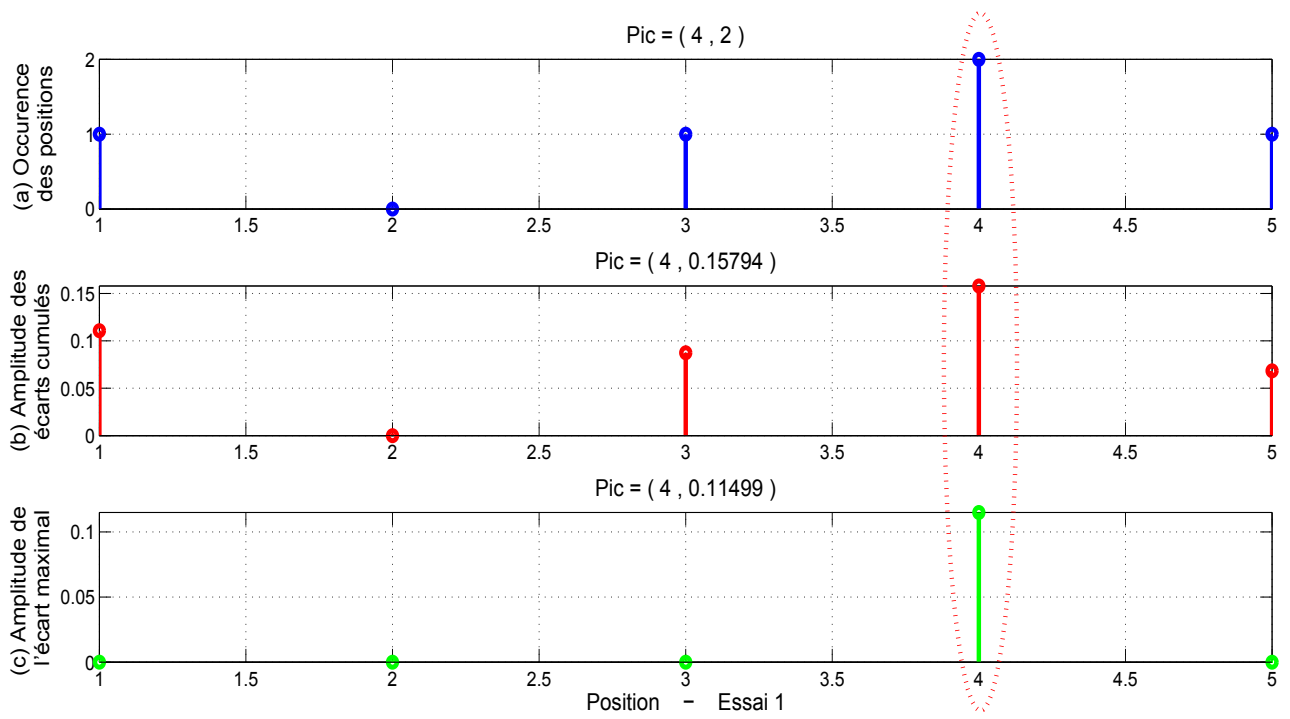


FIGURE D.13. Recherche de la position après un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage et en tapant sur le quatrième étage.

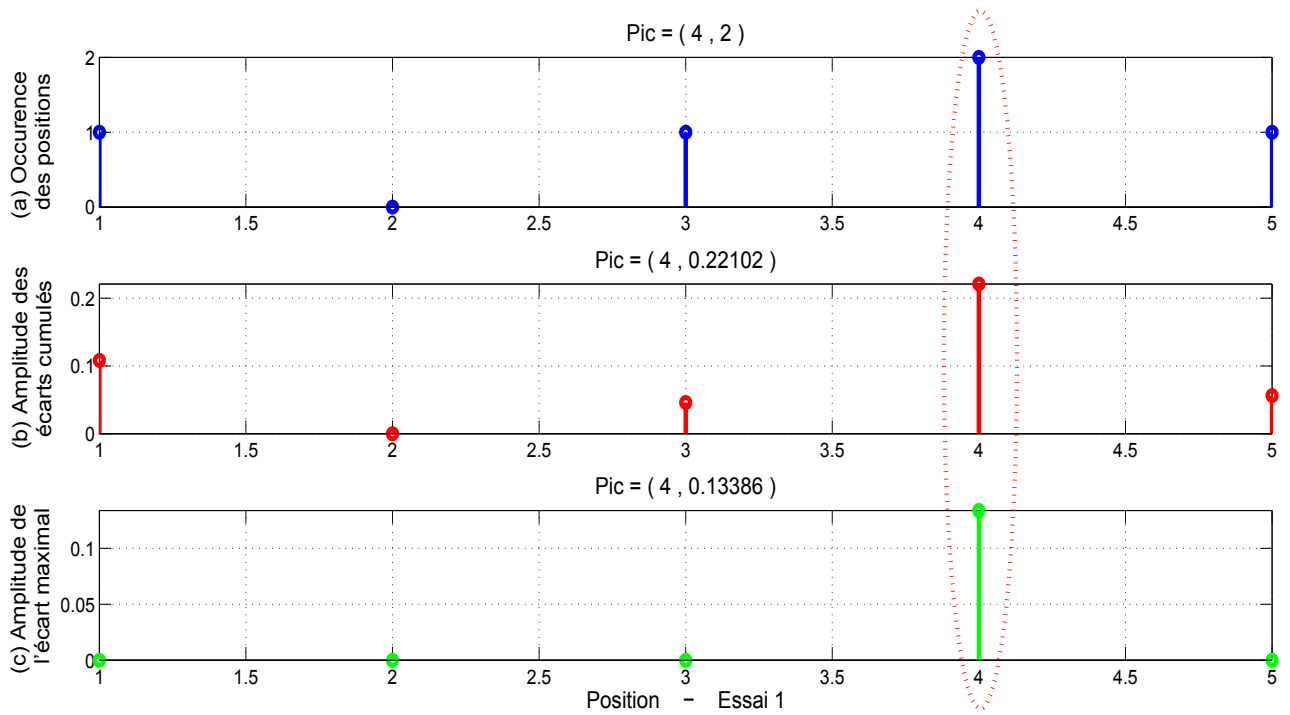


FIGURE D.14. Recherche de la position après un ajout de la masse  $\Delta m_3$  sur le quatrième étage et en tapant sur le cinquième étage.



# Bibliographie

- [1] P.S. Addison, J.N. Watson, and T. Feng. Low-oscillation complex wavelets. *Journal of Sound and Vibration*, 254 (4) :733–762, 2002.
- [2] W. Aquino. An object-oriented framework for reduced-order models using proper orthogonal decomposition (POD). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 (41-44) :4375–4390, 2007.
- [3] P. Argoul, S. Han, F. Conti, and C. Boutin. Time-frequency analysis of free oscillations of mechanical structures. Application to the identification of the mechanical behaviour of buildings under shocks. *Proceedings of the COST F3 conference : System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain*, 283-292, 2000.
- [4] P. Argoul, S. Hans, T.P. Le, and C. Boutin. Analyse temps-fréquence de réponses de bâtiments à des essais de chocs. *Acte du 5<sup>ème</sup> colloque National en Calcul de Structures*, 2 :1057–1064, 2001.
- [5] S. Bellizzi, K. Ege, and C. Vergez. Réduction d’un modèle physique de cuivre pour la synthèse sonore : approche par modes propres orthogonaux (Proper Orthogonal Decomposition). 8<sup>ème</sup> *Congrès Français d’Acoustique, Tours*, avril 2006.
- [6] S. Bellizzi and R. Sampaio. POMs analysis of randomly vibrating systems obtained from Karhunen-Loève expansion. *Journal of Sound and Vibration*, 297 (3-5) :774–793, 2006.
- [7] S. Bellizzi and R. Sampaio. Smooth Karhunen-Loève decomposition to analyze randomly vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 325 (3) :491–498, 2009.
- [8] M. Bergmann. Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d’un cylindre circulaire. *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France*, chapitre 3, 2004.
- [9] J. Bodgi. *Synchronisation piétons-structure : Application aux vibrations des passerelles souples*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.
- [10] R. Carmona, W.L. Hwang, and B. Torrèsani. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45 (10) :2586–2590, 1997.
- [11] A. Chatterjee. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78 (7), avril 2000.
- [12] C. Chauvin. Les ondelettes comme fonctions de base dans le calcul des structures électronique. *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2005.
- [13] D. Chelidze and W. Zhou. Smooth orthogonal decomposition based vibration mode identification. *Journal of Sound and Vibration*, 292 :461–473, 2006.
- [14] C.K. Chui. An introduction to wavelets. *Wavelet Analysis and its Applications, Academic press*, volume 1, 1992.

- [15] P. Ciblat. *Introduction aux communications numériques*. [http://perso.telecom-paristech.fr/~ciblat/docs\\_cours/intro\\_comnum.pdf?#zoom=81&statusbar=0&navpanes=0&messages=0](http://perso.telecom-paristech.fr/~ciblat/docs_cours/intro_comnum.pdf?#zoom=81&statusbar=0&navpanes=0&messages=0). Consulté en Juillet 2013.
- [16] R.R. Coifman and G. Weiss. Book review : Littlewood-paley and multiplier theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84 (2) :242–250, 1978.
- [17] L. Cordier and M. Bergmann. Proper Orthogonal Decomposition : An overview. *Lecture series*, 17 - 21 février 2003.
- [18] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41 (7) :909–996, 1988.
- [19] S.W. Doebling, C.R. Farrar, and M.B. Prime. A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, 30 (2) :91–105, 1998.
- [20] R. Elias, N. Point, J. Bodgi, and P. Argoul. How to retrieve the normal modes using the POD. *Vibrations Shocks and Noise 2012*, XVIII symposium Vibrations chocs et Bruit and ASTELAB - EDF CLAMART, France, 2012.
- [21] S. Erlicher and P. Argoul. Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 (3) :1386–1421, 2007.
- [22] Groupe MMM Maths L'UTES Université Pierre et Marie Curie (Paris 6). *Théorème de la moyenne*. [http://pcsm.univ-lyon1.fr/mathematiques/integration/apprendre/int\\_riemann/theomoy.htm](http://pcsm.univ-lyon1.fr/mathematiques/integration/apprendre/int_riemann/theomoy.htm). Consulté en Juillet 2013.
- [23] U. Farooq and B.F. Feeny. Smooth orthogonal decomposition for modal analysis of randomly excited systems. *Journal of Sound and Vibration*, 316 (1-5) :137–146, 2008.
- [24] B.F. Feeny. On the proper orthogonal modes and normal modes of continuous vibration systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124 (1) :157–160, 2002.
- [25] B.F. Feeny and R. Kappagantu. On the physical interpretation of Proper Orthogonal Modes in vibrations. *Journal of sound and vibration*, 211 (4) :607–616, 1998.
- [26] B.F. Feeny and Y. Liang. Interpreting Proper Orthogonal Modes of randomly excited vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265 (5) :953–966, 2003.
- [27] R. Gordier. Use of Proper Orthogonal Decomposition in the analysis of turbulent flows. *Report, Fluid Turbulence Course, University of Washington*, 2010.
- [28] R. Gordier. On the model validation in non-linear structural dynamics. *PHD thesis*, Université de Liège, Decembre 2002.
- [29] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures. Deuxième édition corrigée et complétée*, Masson, 1996.
- [30] S.I. Gravit. An analytical procedure for orthogonalization of experimentally measured modes. *Journal of the Aero/Space Sciences*, 25 :721–722, 1958.
- [31] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 15 (4) :723–736, 1984.
- [32] K. Gurley and A. Kareem. Applications of wavelet transforms in earthquake, wind and ocean engineering. *Engineering Structures*, 21 :149–167, 1999.
- [33] A. Haar. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Thèse de doctorat, Erste Mitteilung Math. Ann.*, pages 331–371, 1910.
- [34] S. Han and B.F. Feeny. Enhanced Proper Orthogonal Decomposition for the modal analysis of homogeneous structures. *Journal of Vibration and Control*, 8 (1) :19–40, 2002.

- [35] S. Han and B.F. Feeny. Application of Proper Orthogonal Decomposition to structural vibration analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17 (5) :989–1001, 2003.
- [36] R. Hari, A. Hyvärinen, L. Parkkonen, and P. Ramkumar. Independent Component Analysis of short-time Fourier transforms for spontaneous EEG/MEG analysis. *NeuroImage*, 49 (1) :257–271, 2010.
- [37] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja. Independent Component Analysis. *Wiley-Interscience*, 1st edition, 2001.
- [38] A. Hyvärinen and E. Oja. Independent Component Analysis : algorithms and applications. *Neural Networks Research Centre, Helsinki University of Technology*, 13 (4-5) :411–430, 2000.
- [39] R. Kappagantu. An optimal modal reduction for frictionally excited systems. *Thèse de doctorat, Michigan State University*, 1997.
- [40] R. Kappagantu and B.F. Feeny. An “optimal” modal reduction of a system with frictional excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 224 n.5 :863–877, 1999.
- [41] R. Kappagantu and B.F. Feeny. Part 1 : Dynamical characterization of a frictionally excited beam. *Nonlinear Dynamics*, 22 (4) :317–333, 2000.
- [42] R. Kappagantu and B.F. Feeny. Part 2 : Proper orthogonal modeling of a frictionally excited beam. *Nonlinear Dynamics*, 23 (1) :1–11, 2000.
- [43] G. Kerschen. On the model validation in non-linear structural dynamics. *Thèse de doctorat université de Liège*, 2002.
- [44] G. Kerschen, B.F. Feeny, and J.C. Golinval. On the exploitation of chaos to build reduced-order models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1785–1795, 2003.
- [45] G. Kerschen and J.C. Golinval. Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the Singular Value Decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 249 (5) :849–865, 2002.
- [46] G. Kerschen, J.C. Golinval, A.F. Vakakis, and L. Bergman. The method of Proper Orthogonal Decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : An overview. *Nonlinear Dynamics*, 41 :147–169, 2005.
- [47] G. Kerschen, F. Poncelet, and J.C. Golinval. Physical interpretation of Independent Component Analysis in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 :1561–1575, 2007.
- [48] S. Lang. Algebra. *Graduate Texts in Mathematics*, 211, Springer 2002.
- [49] T. Le, G. Ruocci, L. Dieng, N. Point, P. Argoul, and G. Cumunel. Damage assessment of cables by SVD based technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, under review, 2013.
- [50] T.P. Le. Auscultation dynamique des structures à l’aide de l’analyse continue en ondelettes. *Thèse de doctorat*, université de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [51] T.P. Le and P. Argoul. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. *Journal of Sound and Vibration*, 277 (1-2) :73 – 100, 2004.
- [52] Y.C. Liang, H.P. Lee, S.P. Lim, W.Z. Lin, K.H. Lee, and C.G. Wu. Proper Orthogonal Decomposition and its applications - Part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252 (3) :527–544, 2002.
- [53] E. Liberge. Réduction de modèle par POD-Galerkin pour les problèmes d’interaction fluide structure (IFS). *Thèse de doctorat, LEPTAB - Université de la Rochelle, EIGSI*, 2008.

- [54] W.Z. Lin, K.H. Lee, P. Lu, S.P. Lim, and Y.C. Liang. The relationship between eigenfunctions of Karhunen-Loève decomposition and the modes of distributed parameter vibration system. *Journal of Sound and Vibration*, 256 (4) :791–799, 2002.
- [55] J.E. Littlewood and R. Paley. Theorems on Fourier Series and Power Series. *Journal of the London Mathematical Society*, 6 (3) :230–233, 1931.
- [56] H.V. Luong. Etude de la méthode de la transformation en ondelette et l'application à la compression des images. *rapport final de TIPE*, 2005.
- [57] P. Lévy. Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchainées. *Bulletin des sciences mathématiques*, 59 :84–96 et 109–128, 1935.
- [58] D. Maar. Early processing of visual information. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 275 (942) :483–519, 1976.
- [59] S. Mallat. Wavelets for a vision. *Proceeding of the IEEE*, 4 (4) :604–614, 1996.
- [60] S. Mallat. A wavelet tour of signal processing. *3rd edition*, Academic Press, 2008.
- [61] Y. Meyer. Wavelets : Algorithms and applications. *Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia*, 13-31 :101–105, 1993.
- [62] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, and J.H. Poggi. Wavelet toolbox for use with matlab. *version 2.1*.
- [63] M. Munoz, F. Farges, and P. Argoul. Continuous Cauchy wavelet transform analyses of XAFS spectra : A qualitative approach. *American mineralogist*, 88 :694–700, 2003.
- [64] K.K. Nagarajan. Analyse et contrôle des instabilités dans une cavité par modélisation d'ordre réduit. *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France*, chapitre 3, 2010.
- [65] D.E. Newland. Ridge and phase identification in the frequency analysis of transient signals by harmonic wavelets. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121 (2) :149–155, 1999.
- [66] V.H. Nguyen and J.C. Golinval. Damage localization in linear-form structures based on sensitivity investigation for Principal Component Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 329 (21) :4550–4566, 2010.
- [67] V.H. Nguyen and J.C. Golinval. Localization and quantification of damage in beam-like structures using sensitivities of Principal Component Analysis results. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24 (6) :1831–1843, 2010.
- [68] A. Pecker. Dynamique des structures et des ouvrages. *École des Ponts - ParisTech*, Edition 2011.
- [69] N. Point. Méthodes d'optimisation pour l'identification des caractéristiques de chaussées aéronautiques à partir d'essais au deflectomètre à masse tombante. *Laboratoire Central des Ponts et Chaussées*, Stage effectué au sein du laboratoire de l'UR Navier - École Nationale des Ponts ParisTech, 2009.
- [70] M.S. Riaz and B.F. Feeny. Proper Orthogonal Modes of a beam sensed with strain gages. *Journal of Vibration and Acoustics*, 125 (1) :129–131, 2003.
- [71] J. Salvic, I. Simonovski, and M. Bolte zar. Damping identification using a continuous wavelet transform : application to real data. *Journal of Sound and Vibration*, 262 (2) :291 – 307, 2003.
- [72] D.B. Segala, D. Chelidze, and D. Gates. Linear and nonlinear smooth orthogonal decomposition to reconstruct local fatigue dynamics : A comparaison. *22nd international conference on design theory and methodology ; special conference on Mechanical Vibration and Noise*, DETC, 28852 :763–770, 2010.

- [73] D.B. Segala, D. Gates, J.B. Dingwell, and D. Chelidze. Nonlinear Smooth Orthogonal Decomposition of Kinematic features of sawing reconstructs muscle fatigue evolution as indicated by electromyography. *Journal of Biomechanical Engineering*, 133 (3), 031009, 2011.
- [74] M. Sifuzzaman, M.R. Islam, and M.Z. Ali. Application of wavelet transform and its advantages compared to Fourier transform. *Journal of Physical Sciences*, 13 :121–134, 2009.
- [75] G. Strang. Wavelets and dilation equations : a brief introduction. *SIAM review*, 31 (4) :614–627, 1989.
- [76] B. Torr sani. *Analyse continue par Ondelettes*. Inter dition-CNRS  dition, 1995.
- [77] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*.  dition Hermes, Paris, 1998.
- [78] C.G. Wu, Y.C. Liang, W.Z. Lin, H.P. Lee, and S.P. Lim. A note on equivalence of proper orthogonal decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration*, 265 (5) :1103–1110, 2003.
- [79] H. Xu and W. Wang. Orthogonal decomposition of external oscillation. *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2 :684–686, 1988.
- [80] A.M. Yan and J.C. Golinval. Null subspace-based damage detection of structures using vibration measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 (3) :611–626, 2006.
- [81] A.M. Yan, G. Kerschen, P. De Boe, and J.C. Golinval. Structural damage diagnosis under varying environmental conditions, Part II : local PCA for non-linear cases. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19 (4) :865–880, 2005.
- [82] A. Yger. *Traitement du signal et ondelettes*. Master Ingénierie Mathématique, 2006.







## Résumé

### POUR L'ÉVALUATION DES MODIFICATIONS DES CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE

L'évaluation des modifications des caractéristiques d'un système dynamique non-stationnaire est étudiée suivant les modifications des paramètres modaux. Pour cela, nous étudions en premier l'obtention de ces paramètres, à l'aide des méthodes d'identification à partir des réponses vibratoires mesurées. Trois méthodes d'identification sont étudiées : la méthode de Décomposition Orthogonale Propre (POD), la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) et la méthode de Décomposition Orthogonale Régularisée (SOD). Ensuite, trois étapes sont considérées pour suivre les changements de masse des systèmes non-stationnaires à partir des variations des paramètres modaux : la localisation de l'instant du changement (étape 1), la détection de la position du changement (étape 2) et la quantification de la valeur du changement (étape 3). Pour l'étape 1, la transformée en ondelettes (TO) qui est une analyse temps-fréquence est appliquée. Ensuite, trois méthodes de détection de la position du changement de la masse sont développées dans l'étape 2. Enfin, la variation relative des fréquences propres est utilisée pour la quantification de la variation relative de la masse dans l'étape 3. Toutes ces méthodes ont été testées numériquement. De plus une maquette simplifiée de bâtiment a été instrumentée sous excitations de choc. Ces essais ont permis de valider les méthodes développées dans cette thèse.

*Mots clefs* : système dynamique, identification modale, paramètres modaux, décomposition orthogonale, transformée en ondelettes, transformée de Fourier.

## Abstract

### FOR THE EVALUATION OF CHARACTERISTIC CHANGES OF A DYNAMIC SYSTEM

Modification of modal parameters is considered the main tool for the evaluation of characteristic changes of a non stationary dynamic system. Therefore, our first interest is to obtain these modal parameters from vibration measures using identification methods. Three methods are discussed here : Proper Orthogonal Decomposition (POD), Singular Value Decomposition (SVD) and Smooth Orthogonal Decomposition (SOD). Then, in order to evaluate the mass changes in non stationary systems, three steps are proposed : instant localization of mass changes (step 1), determination of geometrical location of the mass changes (step 2) and quantification of mass changes (step 3). The Wavelet transform (WT), considered to be a time-frequency analysis, is indented in step 1. In step 2, three methods for the detection of the position of the mass changes are developed. Finally, the relative variation of the natural frequencies of the system is used to evaluate the relative variation of the mass in step 3. The efficiency of these methods is verified by numerical tests. Moreover a building experimental model, instrumented with accelerometers, is studied in the case of after-shock vibrations. These experimental tests permit to validate the methods proposed in this thesis.

*Keywords* : dynamic systems, modal identification, modal parameters, orthogonal decomposition, wavelet transform, Fourier Transform.